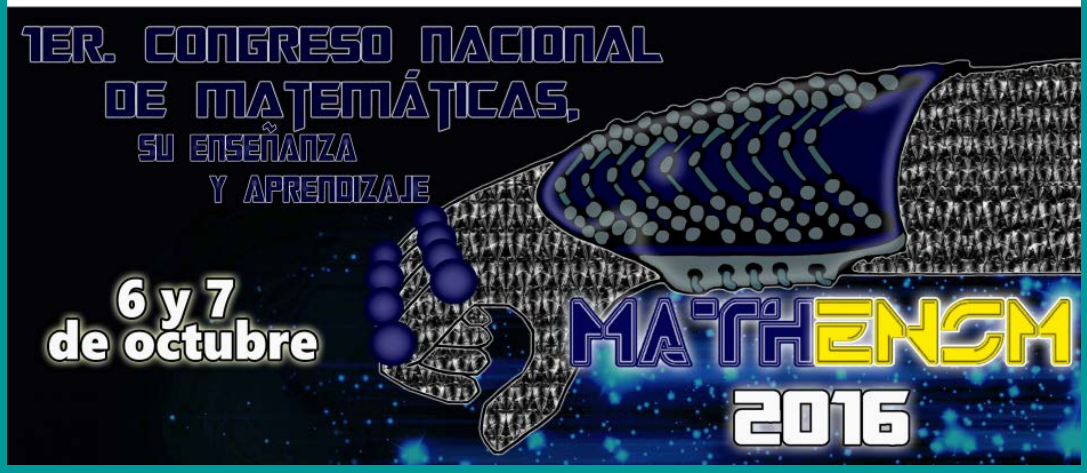
SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Administración Federal de Servicios Educativos en el Distrito Federal
Dirección General de Educación Normal y Actualización del Magisterio
Escuela Normal Superior de México
Departamento de Investigación y Experimentación Educativa



"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"

Memorias en Extenso

Escuela Normal Superior de México 80 Aniversario 1936 - 2016 "El Deber por El Saber"

Cuerpo Académico PRODEP ENSMEX-CA-2 Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación inicial y la Educación Básica

/mathensm www.mathensm.org.mx YouTube MATHENSM

Francisco Guillermo Herrera Armendia. Marcos Fajardo Rendón.

Editores.

Edición Electrónica. ISBN: 978-0-9977571-0-1

978-0-9977571-0-1

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"

Francisco Guillermo Herrera Armendia y Marcos Fajardo Rendón

Editores

Escuela Normal Superior de México. www.dgespe.sep.gob.mx/rs/ens/directorio/escuelas/66

Cuerpo Académico PRODEP ENSMEX-CA-2 Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación inicial y la Educación Básica

Cuerpo Académico "La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Básica". www.mathensm.org.mx

Departamento de Investigación y Experimentación Educativa. Escuela Normal Superior de México. www.diee.mx

Impreso, Digitalizado, Compilado y Editado en México. Primera Edición (Ciudad de México, México): Octubre de 2016. Derechos Reservados © 2016 Escuela Normal Superior de México.

Todos los autores han cedido su derecho de publicación conservando su derecho de autoría y republicación en resguardo por el DIEE de la ENSM. Libre acceso bajo BOAI-2001

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5 E-ISBN: 978-0-9977571-0-1 ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8

DIRECTORIO

Escuela Normal Superior de México

"el deber por el saber"

María Luisa Gordillo Díaz

Directora General de Educación Normal y Actualización del Magisterio en la Ciudad de México.

Gonzalo López Rueda

Director de la Escuela Normal Superior de México

Mercedes Takagui Carbajo

Subdirectora Académica de la Escuela Normal Superior de México

Araceli Cruz Ruíz

Subdirectora Administrativa de la Escuela Normal Superior de México

Ernesto Uribe Gómez

Jefe del Departamento de División de Licenciatura

Marcos Fajardo Rendón

Jefe del Departamento de Investigación t.m.

COMITÉS

1er Congreso Nacional De Matemáticas, Su Enseñanza Y Aprendizaje: "MATHENSM 2016"

Presidente del Congreso
Francisco Guillermo Herrera Armendia

Coordinación de Inauguración y Clausura

Gonzalo López Rueda

Coordinación General Comité Organizador
Mercedes Takagui Carbajo

Web Master

Marcos Fajardo Rendón

Web Designer

Gregorio Montes de Oca Godínez

Coordinador de Enlace y Vinculación
Isaac Villavicencio Gómez

Coordinador de BIT-Tickets de Asistencia

Gabriel Tenorio Hernández

Difusión
María de Jesús Sentiés Nacaspac

Producción Audiovisual (CENSM-MATHENSM)

Dylan Hernández (Letra)

Tozu beats (Música)

Arick Frioz (Audio)

Gabriel Tenorio Hernández (Video)

Editores y Registro de ISBN
Francisco Guillermo Herrera Armendia

Marcos Fajardo Rendón

Jefe de Redacción
José Daniel Cisneros Pérez

Coordinador de Indexación y Certificación Digital
Gregorio Montes de Oca Godínez

Coordinador de Moderadores
Carolina Rubí Real Ortega

Consejero Asesor
Vitaliano Acevedo Silva

Gestión Institucional

Erick Munguía Guzmán

Coordinación de Staff

Gloria Angélica Hernández López

Coordinación Estudiantil de Staff

Anabel Frías Galicia

Asistente de Coordinación Estudiantil

Itzel Aguirre Salinas

COMITÉ CIENTÍFICO

PRESIDENTE

GONZALO LÓPEZ RUEDA

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*MARÍA DE JESÚS SENTIÉS NACASPAC*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*CAROLINA RUBÍ REAL ORTEGA*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*MARICELA BONILLA GONZÁLEZ*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*MARLENY HERNÁNDEZ ESCOBAR*
TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE COACALCO	*REBECA DÍAZ TÉLLEZ*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*RACIEL TREJO RESÉNDIZ*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*VITALIANO ACEVEDO SILVA*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*DANIEL CISNEROS PÉREZ*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*CARLOS JIMÉNEZ GONZÁLEZ*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*ORLANDO VÁZQUEZ PÉREZ*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*SAÚL ELIZARRARÁS BAENA*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*ISAAC VILLAVICENCIO GÓMEZ*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*MARCOS FAJARDO RENDÓN*
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO	*FRANCISCO GUILLERMO HERRERA ARMENDIA*

Universidad San Carlos	*Mariano Benítez Benítez*
Universidad Autónoma de Querétaro	*José Emilio Vargas Soto*
Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco	*Leopoldo Viveros Rosas*
Universidad de Colima	*Rodolfo Antonio Mejía Villaseñor*

1era Muestra de Habilidades Matemáticas para estudiantes de 3er grado de Educación Secundaria.

2016: "ARQUIMEDES CABALLERO CABALLERO"

Presidente

Francisco Guillermo Herrera Armendia

Cuerpo académico "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Docente y la Educación Básica". ENSMEX-CA-2

www.mathensm.org.mx

Francisco Guillermo Herrera Armendia

Representante e Integrante

Raciel Trejo Reséndiz

Integrante

Enrique Salazar Peña

Integrante

Isaac Villavicencio Gómez

Integrante

Vitaliano Acevedo Silva

Integrante

Marleny Hernández Escobar

Colaboradora

Marcos Fajardo Rendón

Colaborador

Prólogo

Entre 1958 y 1962 una de las más prestigiadas revistas mexicanas de Matemáticas publicó diversos artículos relacionados con la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, muchos de ellos escritos por docentes que habían egresado de la Escuela Normal Superior (ENS), nos referimos a la Revista Matemática publicada por la Sociedad Matemática Mexicana. Uno de estos artículos se refiere a los nexos entre la docencia y la investigación. En él, su autor, Francisco Zubieta (quien fuera también docente de la ENS y escribiera los prestigiados libros de texto Aritmética Razonada, Geometría Razonada y Álgebra Razonada muy recomendados durante las décadas de los 60's y posteriores y que son producto de las lecciones en escuelas secundarias y preparatorias) enfatiza en que el aparato gubernamental debe atención preferente a la ENS dotándola de equipo apropiado, mejores docentes y planes de estudio eficaces, entre otros rubros, puesto que la Institución prepara futuros maestros para la escuela secundaria. Por ello, los docentes de la ENS deben poseer experiencia tanto en la docencia como en la investigación. Sin duda alguna, estos dos rubros han distinguido al Cuerpo Docente que ha laborado en la ENS durante 80 años. La producción académica así como la aceptación de sus egresados en el campo laboral, lo han confirmado todo este lapso de tiempo. La evidencia de solo algunos de estos productos la mencionamos como una muestra, y también como un reconocimiento a la incansable labor educativa. Pero para ello, debemos remontarnos en la historia al año de 1936. Para entonces, ya se había organizado la Segunda Enseñanza, separando así los tres primeros años de la escuela Preparatoria, y los docentes encargados de atender este nivel educativo no estaban preparados específicamente para ello, pues la mayoría laboraban como docentes en la escuela primaria, o en los bachilleres y otros eran profesionistas en otra rama con gusto por la enseñanza. Para garantizar un buen servicio educativo, hacía ya dos años que se habían organizado cursos breves para mejorar la capacidad científica y técnica de ellos. Así que el Consejo de la Educación Superior y de la Investigación Científica dictaminó y aprobó la organización y los planes de estudio del Instituto de Mejoramiento del Profesorado de Enseñanza Secundaria ante el C. Secretario de Educación Pública y con base en ello, el miércoles 29 de julio de 1936, el C. Presidente Constitucional de los Estados Unidos Mexicanos expidió el Acuerdo que autorizaba a la Secretaría de Educación Pública para fundar el Instituto de

Preparación del Magisterio de Enseñanza Secundaria, así como el reglamento de su funcionamiento y el respectivo sistema de revalidación de estudios de asignaturas cursadas en otras instituciones. Es así que se llevó a cabo la ceremonia de inauguración de los cursos el jueves 30 de julio a las 20:00 horas en las instalaciones de la calle de Fresno, en Santa María la Ribera. Diversos Planes de estudio fueron puestos en práctica (1936, 1938, 1940, 1942). Al expedirse la Ley Orgánica de Educación Pública en 1942 es cuando la Institución toma el nombre de Escuela Normal Superior (ENS). En esa época, queda pendiente el adecuar las instalaciones en el edificio propio, la dotación de laboratorios y talleres, el aprovisionamiento de material didáctico y el funcionamiento de la biblioteca, además de iniciar el funcionamiento de dos secundarias anexas para la observación y experimentación. Entre 1942 y 1946 la ENS extiende sus servicios educativos a docentes foráneos de Segunda Enseñanza y de Educación Normal, mediante cursos Intensivos de verano e invierno durante los grandes periodos de receso de aquella época. Además, se organizan frecuentemente Ciclos de Conferencias y Seminarios que complementan la formación magisterial

En 1940 egresa la primera generación de profesores de Educación Secundaria de la ENS con especialidad en Matemáticas: José Niebla Martínez, Mercedes Rico Miner, Sara Rodiles Aguirre y Toribio Velasco Zapiáin. Entre 1941 y 1947 hicieron lo propio 34 profesores, época en la que Alfonso Nápoles Gándara, entonces docente de la ESN y prestigiado intelectual en el área de las matemáticas, publicara su obra Álgebra Elemental para escuelas secundarias y que estuvieran vigentes hasta casi finales de la década de los años 60, con contenido que aborda los temas de forma más rigurosa y precisa que, por ejemplo, la conocida obra del autor cubano Aurelio Baldor. Sin la intención de demeritar los logros académicos de los egresados, algunos de ellos son conocidos gracias a la divulgación de sus obras, como Nidia Ayala B. de Arreola, quien fuera miembro de la Junta Directiva de la Sociedad Matemática Mexicana entre 1959 y 1962 y Jefa de Carrera en la ENS; escribió artículos en la revista de esa organización. En uno de ellos titulado “El material para la enseñanza” publicado en enero de 1960, sigue las ideas de David Hilbert con relación al uso de la intuición en el aprendizaje de la geometría; escribe sobre el uso de materiales hoy muy conocidos, como las Regletas de colores Cuisenaire para abordar el estudio de los Números Naturales y Racionales; así como las propiedades de las progresiones aritméticas; teoría de los exponentes enteros

(estudio de las progresiones geométricas); estudio de productos notables; análisis combinatorio. También propone el uso del geoplano para el estudio de la geometría con temas relacionados con el trazo o dibujo de figuras geométricas con el uso de material elástico; el estudio de transformaciones en el plano como la rotación, la traslación, la simetría y sus combinaciones. Analiza el uso de material manipulable de cartón, plástico o madera para utilizarse en el estudio de los productos notables, el teorema de Pitágoras, el triángulo de Pascal y las funciones trigonométricas, además del uso de la banda elástica propia para el estudio del manto de la superficie: (x^2+y^2) ^2-x^2 (x^2-1)=0; superficies de segundo, tercero y cuarto orden; superficies de Kummer; superficie cúbica con 4 puntos dobles; el estudio del helicoide reglado cerrado recto, cerrado oblicuo, abierto oblicuo. Propone además el uso de material fílmico especializado. En 1962, la profesora Ayala publica el artículo titulado "Nuevas ideas sobre la enseñanza de las matemáticas" en el que aborda el concepto de Matemática Moderna, entre otras ideas, con la intención de hacer reflexionar sobre la pertinencia de incluir en los programas de enseñanza media una iniciación a la Estadística, a la Topología y al abordaje de problemas de la axiomatización. En su escrito afirma que en la ENS se ofrecen cursos como: Complementos de Aritmética, Complementos de Álgebra, Complementos de Geometría, Complementos de Trigonometría, Geometría Descriptiva, Conceptos Fundamentales de las Matemáticas, Primero y Segundo cursos de Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral; Historia de Matemáticas; refiere además que se adquirieron libros de textos publicados por la Universidad de Yale y que en colaboración con la Sociedad Matemática Mexicana se organizaron cursos de Álgebra Moderna, Geometría Sintética, Complementos de Cálculo Diferencial e Integral. Por otro lado, la ENS ha propuesto programas piloto sobre matemática moderna que se aplica con estudiantes de la Escuela Secundaria Anexa. También son conocidos Arquímedes Caballero Caballero, Lorenzo Martínez Cedeño (1943) y Jesús Bernárdez Gómez (1944) quienes escribieron los textos de Matemáticas para primero, segundo y tercer grado de secundaria, obras que estuvieron vigentes por más de tres décadas y que aun en la actualidad son material de referencia; además de los textos de Geometría Analítica y Cálculo Diferencial e Integral, autoría de Arquímedes Caballero, quien ya para 1946 formaba parte de la planta Docente de la especialidad de matemáticas de la ENS, junto con Oswaldo Olvera Olalde, A. L. Espino Flores, Gustavo Camacho G., Enriqueta González Baz, Francisco Centeno Ita, Álvaro Bernal Estrada, Sara Rodríguez Aguirre. El director de la Institución era el

profesor Celerino Cano. El profesor Arquímedes Caballero escribe, siendo ya director de la ENS, en 1961 su artículo titulado "Formación de los maestros de Matemáticas para la Segunda Enseñanza" en el que apunta las características necesarias que todo docente de matemáticas debe poseer: formación cultural, formación científica, formación matemática, formación pedagógica general y específica, práctica de la enseñanza, cualidades que durante la trayectoria estudiantil de los docentes en formación en la ENS adquieren y evidencian al egresar con rasgos distintivos como la cultura, la preparación específica en la materia de enseñanza y conocedores de los problemas pedagógicos de la enseñanza secundaria. En ese año de 1961, en el número 9 de la Revista Matemática, se da a conocer el convenio entre la Escuela Normal Superior y la Sociedad Matemática Mexicana con relación a establecer un programa de postgraduados en la ENS. Entre 1959 y 1960 se ofertaron los cursos siguientes: Álgebra Moderna, impartido por Emilio Lluis; Geometría Sintética, por Gonzalo Zubieta; Análisis Vectorial, por Manuela G. de Álvarez; Iniciación a la Topología, por José Adem; Álgebra Moderna, por Humberto Cárdenas; Complementos de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales, por Manuela G. de Álvarez; también se organizó un ciclo de conferencias de divulgación a cargo de: Roberto Vázquez, José Adem, Enrique Valle, Carlos Imaz y Carlos Graef Fernández con el propósito de fortalecer la formación de los estudiantes de la ENS. Ya para entonces, se había aprobado la Reforma a la Escuela Normal Superior a través del Plan de Estudios 1959 de cuatro años de duración, que contempló el egreso de sus estudiantes con el título de Maestro de Matemáticas además de otras 14 especialidades, de acuerdo con el texto de Urbano Bahena Salgado titulado Historia de la Escuela Normal Superior de México (dos tomos) publicado con motivo del sexagésimo aniversario de la Institución. En el Primer Año se cursaban: Conocimiento de los Adolescentes, Psicotécnica Pedagógica, Lengua Extranjera, Revisión y Complementos de Aritmética, Álgebra, Geometría; Segundo Año: Educación de los Adolescentes, Didáctica General, Lengua Extranjera, Complementos de Álgebra, Trigonometría Plana y Esférica, Complementos de Geometría. Tercer Año: Materia Pedagógica Optativa, Didáctica de la Especialidad, Elementos de Geometría Descriptiva y Dibujo de Proyecciones, Primer curso de Geometría Analítica y Cálculo Diferencial, Física General, Materia optativa de la Especialidad. Cuarto Año: Política Educativa de México, Didáctica de la especialidad, Cálculo Práctico y Nomografía, Historia de las Matemáticas, segundo curso de Geometría Analítica y Cálculo Integral, Materia Optativa de la Especialidad. Las materia optativas eras las siguientes:

Elementos de Mecánica General y Aplicaciones Fundamentales, Conceptos Fundamentales de Matemáticas, Química General, Cosmografía, Introducción a la Estadística Matemática. El cuerpo docente de la especialidad de matemáticas la integraban los profesores: Nydia Ayala de Arreola, Marta Olvera, Manuela Garín de Álvarez, Enriqueta González Baz, Francisco Centeno Ita, Arquímedes Caballero Caballero, Demetrio González Chaparro, Habacuc Pérez Castillo, Francisco Gorja Navarrete, Antonio Barragán Saldaña, Marta María Arteaga C., Jesús Bernárdez Gómez, Esteban J. Balarezo Aguirre, Lorenzo Martínez Cedeño, Fany Alicia Juárez C., Hébert Rodríguez Escudero, Eduardo Monroy Ortiz, Rafael Balero Vázquez, Bertha Lanzagorta Arau, Antonio Mansilla Pérez. En estos años los libros de texto de matemáticas para la Segunda Enseñanza en sus tres grados cuya autoría se debe a Arquímedes Caballero, Lorenzo Martínez y Jesús Bernárdez publicados por Editorial Esfinge tuvieron gran éxito pues la presentación de los temas de contenido fue en extremo, didáctico. Como ejemplo, se puede citar el estudio de las fracciones algebraicas en segundo año de secundaria, con el subtema de Reducción de Fracciones Algebraicas al menor denominador común: 3/ 4a ^3 ,(a+1)/2x ,(a-1)/ 8x ^3 y mostrándole al estudiante, paso a paso, la manera de utilizar el m.c.m., para encontrar la solución. Otro texto es el que publicó Editorial Herrero, escrito por el profesor José María Sánchez Meza que ya en 1962 era catedrático de la ENS. Su texto para el tercer grado de Segunda Enseñanza. Los temas no eran fáciles de abordar, sin embargo, la explicación que muestra, por ejemplo para el trazo de la parábola y=1/2 x^2 y otros ejemplo más, es también muy didáctico, sobre todo en los temas que implican el manejo de radicales, el estudio de logaritmos y la resolución de triángulos oblicuángulos, o el estudio de las llamadas Ley de Seno, Ley de Coseno y Ley de las Tangentes. En 1968, la Secretaría de Educación Pública, a través de la Dirección General de Segunda Enseñanza, emita el Boletín de Matemáticas en el que da a conocer la necesidad de reformar los Planes de Estudio, los programas y los métodos relativos a la enseñanza de las Matemáticas, la Física, la Química y la Biología, con el objetivo de ir a la par de otros países en el rubro educativo. Sostiene el documento que en México, estos cambios comienzan en los niveles superiores, por ello, la Dirección General de Segunda Enseñanza, desde 1965 había auspiciado la realización de experiencias con programas de Matemáticas actualizados que responden a las necesidades del mundo científico y tecnológico de la época. Sugiere conservar los mismos temas que se han venido estudiando, pero en orden distinto a fin de lograr la unidad lógica necesaria para el aprendizaje correcto de los estudiantes. Se

propone que la primera Unidad se dedique al estudio de los conceptos básicos elementales de los conjuntos (pertenencia, inclusión, conjuntos especiales, operaciones: unión e intersección) y el concepto de relación, puesto que ellos sirven de base para la estructura matemática del programa. De este modo, el concepto de número natural está ligado a los conceptos de conjuntos equivalentes, correspondencia de elemento a elemento entre dos conjuntos y de cardinalidad. Se continúa con el estudio de los números primos, los números racionales y sus representaciones para terminar con el estudio de la geometría. La propuesta fue bien entendida por un equipo de profesores de la ENS, Miguel Ángel Curiel Ariza, Humberto López Pineda Flores, Fidel Peralta Corona, Cuauhtémoc Tavera Guerrero y Elías Villar Quijano, quienes conjuntamente con el equipo del Instituto de Matemáticas de la UNAM representados por Humberto Cárdenas Trigos y Emilio Lluis Riera escribieran los textos titulados Matemáticas, para primero, segundo y tercer cursos de Segunda Enseñanza, publicados por editorial C.E.C.S.A., cuyo diseño editorial incluía un papel más grueso y la incorporación de color rojo y rosa para resaltar ideas importantes, esquemas en dos tonos de gris, ilustraciones que esquematizan el tema estudiado, muy al estilo de los años 70's, que seguían la influencia de Z. P. Dienes, aparte de los aspectos didácticos necesarios. Una actualización de esta obra de publicó en 1975 con el nombre de Matemáticas a través de problemas. Para esos años, concretamente al siguiente y de acuerdo con el texto de Urbano Bahena Salgado, se publica el Acuerdo No. 15019 por el que se autoriza a los establecimientos escolares que integran el Sistema Educativo Nacional la aplicación de los planes de estudio de educación normal a nivel licenciatura por ello, la ENS adopta los mismos, con fecha jueves 25 de noviembre de 1976. Al terminar los 8 semestres, los interesados obtienen el título de Profesor de Educación Media en la especialidad de Matemáticas. La malla curricular correspondiente a esta licenciatura es: Primer Semestre: Psicología I, Tecnología Educativa I, Lengua extranjera I, Español I, Lógica y conjuntos, Matemáticas y su didáctica I; Segundo Semestre: Psicología II, Tecnología educativa II, Lengua Extranjera II, Español II, Aritmética, Matemáticas y su didáctica II; Tercer Semestre: Psicología III, Ciencias naturales I, Lengua Extranjera III, Español III, Álgebra I, Matemáticas y su didáctica III; Cuarto Semestre: Psicología IV, Ciencias naturales II, Lengua Extranjera IV, español IV, Álgebra II, Matemáticas y su didáctica IV; Quinto Semestre: Filosofía de la Educación I, Ciencias Naturales III, Ciencias Sociales I, Geometría I, Trigonometría, Matemáticas y su didáctica V; Sexto Semestre: Filosofía de la Educación II, Ciencias Naturales IV, Ciencias

sociales II, Geometría II, Analítica I, Matemáticas y su didáctica VI; Séptimo Semestre: Legislación educativa, Historia de la Educación, Ciencias sociales III, Estadística y probabilidad I, Analítica II, Actividades de titulación I; Octavo Semestre: Administración educativa, Historia de la Educación II, Ciencias sociales IV, Estadística y Probabilidad II, Matemática aplicada, Actividades de titulación. Para cada semestre, se dedican 30 horas por semana en la modalidad presencial. Sin embargo, por razones administrativas nunca entró en operación. A fines de la década de los 70's y principios de la siguiente, tanto profesores como egresados de la ENS realizaron trabajos de investigación cuyo producto final fue la elaboración de libros de texto para la educación Secundaria. Habacuc Pérez Castillo publicó en 1977 los libros para los tres grados de secundaria, tanto de texto como el cuaderno de trabajo, publicación respaldada por Editorial Herrero. En este último incorporó la aplicación de las técnicas de Grupo en el proceso de enseñanza – aprendizaje, pues sostiene que la participación directa del estudiante en las sesiones desarrolla el conocimiento al discutir, analizar, argumentar, refutar algún tema tratado involucrando así un pensamiento dialéctico y lógico en sus actividades. Además permite desarrollar el efecto de la maduración en las ideas y el lenguaje, en la comunicación y el espíritu de convivencia social, y la adquisición de hábitos de estudio, disciplina, expresión oral, saber escuchar, etc. Tal pareciera un discurso actual, por ello, en este aspecto realmente se adelantó a su época. En la presentación de su Cuaderno de Trabajo para Tercer Grado de secundaria, sugiere que la distribución de los grupos se realice con técnicas como: a) el murmullo; b) los corrillos; c) Phillips 66; d) Reja; e) Foro; f) Comisión; g) Seminario; h) Mesa Redonda; i) Panel; j) Simposio. Brevemente define cada una de estas técnicas grupales, y si a esto se le agrega el uso de materiales didácticos, el trabajo se convierte en un verdadero Laboratorio de Matemáticas. Además, incluye la reseña histórica de algún matemático célebre, en su sección "Personaje del Mes". Esta maravillosa obra tuvo aceptación, pese a las modificaciones en los planes de estudio en la educación secundaria, por más de 25 años. Otro texto que se publicó a fines de los 70's lo escribieron Eloísa Beristain Márquez y Yolanda Campos Campos, catedráticas tanto en escuelas secundarias como en la ENS. La obra Matemáticas, para los tres grados de educación secundaria tuvieron varias reimpresiones, estando vigente hasta fines de los 80's. Los textos explican los temas de manera adecuada, fácil de entender por los estudiantes de secundaria. Por ejemplo, el tema de Estructuras de los números enteros con la adición incluye el trabajo con el término Estructura de grupo, nada fácil de entender, sin

embargo, de manera concreta lo explica con ejemplos sencillos y sin descuidar el uso de un lenguaje riguroso y formal, por ejemplo, menciona las propiedades que cumple la adición. En el texto de primer grado, una de ellas es el inverso aditivo y la enuncian así: Para toda $a \in Z$, $\exists -a$, | $a+(-a)=0$. Otro texto no menos importante de aquella época lo realizan Felipe Robledo Vázquez y Fernando Josué Cruz Ramos en 1977, publicado por Editorial Trillas, para primer grado de secundaria. En él, los autores explican los términos de forma ingeniosa, además de ofrecer gran variedad de ejercicios, ejemplos y soluciones. Los editores cuidaron bien el diseño de un peculiar índice para la fácil localización de objetivos, obra que además contiene múltiples ilustraciones que permiten visualizar el contenido matemático explicado. Para 1983, el Plan y Programas de Estudio de la Educación Normal son reformados, con base en el Acuerdo No. 135. La malla curricular para la carrera de Licenciado en Educación Media con especialidad en Matemáticas, estipula: Primer Semestre: Taller de Lectura y Redacción I, Comunicación Educativa, Psicología Educativa, Historia Contemporánea de México, Aritmética I, Geometría I. Segundo Semestre: Taller de Lectura y redacción II, Comunicación Educativa II, Psicología del Aprendizaje, El Estado Mexicano y la Educación, Aritmética II, Geometría II. Tercer Semestre: Introducción a las técnicas de Investigación educativa, Didáctica General, Conocimiento del educando (adolescente), Problemas Económicos, Sociales y Políticos de México, Álgebra I, Geometría III. Cuarto Semestre: Análisis del Sistema Educativo Nacional, Tecnología Educativa, Formación del Educando (Adolescente), Técnicas de Proyección de la Escuela a la Comunidad, Álgebra II, Trigonometría. Quinto Semestre: Seminario de Pedagogía Comparada I, Evaluación educativa, Técnicas de Acercamiento a los problemas del Educando (Adolescentes), Demografía y Educación, Álgebra Superior, Geometría Analítica I. Sexto Semestre: Seminario de Pedagogía Comparada II, Diseño Curricular, Laboratorio de Docencia I, Álgebra Superior II, Problemas Matemáticos de la Ciencia I, Geometría Analítica II. Séptimo Semestre: Aportes de la Educación Mexicana a la Pedagogía. Modelos Educativos Contemporáneos. Taller de Estadística Aplicada a la Educación I, Laboratorio de Docencia II, Laboratorio de Docencia III, Problemas Matemáticos de la Ciencia II, Cálculo diferencial e Integral I. Octavo Semestre: Taller de Estadística Aplicada a la Educación II, Laboratorio de Docencia IV, Laboratorio de Docencia V, Seminario de Evolución del Conocimiento del Área, Programación y computación, Cálculo Diferencial e Integral II. Total de Créditos: 346 y Total de Horas 144. Debemos mencionar que en 1981 se reformaron los Planes y Programas de Educación Secundaria por

lo que las tendencias en los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas inician una serie de cambios que hasta la fecha se siguen efectuando. Desde mediados de la década de los 70's y hasta ya por terminarse la década de los 80's la estabilidad económica mexicana estuvo convulsionada por una serie de eventos desafortunados que ocasionaron a su vez mucha inestabilidad social. Estos hechos junto con otras causas hicieron tomar la cuestionable decisión de las autoridades gubernamentales para hacer cambiar de sede las instalaciones de la Escuela Normal Superior en el año de 1983, primero a sedes alternativas, para finalmente establecerse en las actuales instalaciones de la Av. Manuel Salazar No. 201, Colonia Ex. Hacienda El Rosario en la Delegación Azcapotzalco al noroccidente de la Ciudad de México. Para fines de los 80's y principios de los 90's los docentes de la especialidad de matemáticas de la escuela Esnel Pérez Hernández, Gonzalo López Rueda, Santiago Valiente Barderas, María de Jesús Sentíes Nacaspac, Héctor Cantú Lagunas, toman la iniciativa de publicar la Revista de Opinión sobre la Enseñanza de la Matemática "De 6 a 10", con el propósito de difundir productos de investigación y experiencias docentes que motivasen a la reflexión, sobre todo, de los profesores frente a grupo en la educación básica. La edición de la revista incluyó estas secciones: Didáctica, Historia, Ciencia y Matemáticas, Biografías e Invitados. Esta obra editorial tuvo la oportunidad de ser difundida en Radio Educación, en el programa titulado Barra Cultural en 1991. El conjunto de publicaciones tiene registro ante el Consejo Nacional para la Ciencia y la Tecnología. Un gran colaborador de artículos para esta revista fue el Profesor Santiago Valiente Barderas, divulgador del conocimiento matemático y de su didáctica quien además escribió muchos libros de texto para estudiantes de secundaria. En 1994 un equipo de docentes de la ENS Gonzalo López Rueda, Esnel Pérez Hernández, María de Jesús Sentíes Nacaspac colaboraron junto con otros autores en la elaboración de los Libros de Texto Gratuitos de Quinto y Sexto de educación primaria, al ganar el concurso convocado por parte del Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito. Estos textos presentan como novedad el abordaje de los contenidos de manera que el estudiante de educación primaria se vuelve el centro del proceso de enseñanza – aprendizaje, es decir participa dinámicamente en las sesiones de la asignatura. La primera edición la reciben los estudiantes de primaria en 1994, la siguiente edición corregida aparece en 1995 y continuaron reimpresiones de esta primera edición hasta 1999. La academia de profesores de la ENSM organizó el Noveno Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación

Matemática los días 23, 24, y 25 de septiembre de 1998, organización a cargo de los profesores María de Jesús Sentíes Nacaspac y Esnel Pérez Hernández, quienes también fungieron como editores y celebrado en las instalaciones de la ENSM, con la colaboración del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados y El Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. Asistieron a presentar reportes de investigación y talleres sobre el uso de estos dispositivos ponentes tanto del Distrito Federal como del interior de la República y en las modalidades de conferencias plenarias y paralelas (en total 27) y talleres sobre el uso de estos dispositivos, . La Universidad Autónoma del Estado de Morelos organiza el vigésimo primer Encuentro Internacional sobre Psicología de la Educación Matemática del 23 al 26 de octubre de 1999. El profesor Esnel Pérez Hernández participa como miembro del Comité Científico de ese evento académico. Para ese año, se publica el Acuerdo 269 que sustenta la aplicación del Plan y Programas de estudio para la Licenciatura en Educación Secundaria, con sus doce especialidades. Para el caso de matemáticas, la malla curricular contempla ocho semestres, con un total de 224 horas y 392 créditos. Una modalidad que aporta este Plan de Estudios es la condición necesaria de escribir el Documento Recepcional y presentar su réplica pública para obtener el título profesional correspondiente. Además, se incluye la especificación que agrupa conjuntos de asignaturas en tres grandes grupos: Formación General para educación Básica, Formación común para todas las especialidades de secundaria y Formación específica por especialidad. Otra aportación de este nuevo Plan de Estudios se relaciona con la realización del Servicio Social durante las actividades académicas de séptimo y octavo semestres. El acercamiento a la práctica escolar y la práctica intensiva en condiciones reales de trabajo adquiere especial dedicación, pues desde el inicio del programa educativo los estudiantes inscritos van adquiriendo progresivamente la experiencia inicial necesaria para el trabajo con jóvenes que cursan la educación secundaria. Las asignaturas correspondientes son: Primer Semestre: Bases filosóficas y legales organizativas del Sistema Educativo Mexicano; estrategias para el estudio y la comunicación I; Problemas y Políticas de la educación básica; Propósitos y contenidos de la Educación Básica I; Desarrollo de los Adolescentes I, Aspectos Generales; Escuela y Contexto Social. Segundo Semestre: La Educación en el Desarrollo Histórico de México I; estrategias para el estudio y la comunicación II; Introducción a la enseñanza de las matemáticas; La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones Básicas; Desarrollo de los Adolescentes II. Crecimiento y

sexualidad; Observación del Proceso escolar. Tercer Semestre: La educación en el Desarrollo Histórico de México II; Pensamiento algebraico; Los números y sus relaciones; La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones Básicas; La expresión oral y escrita en el proceso de enseñanza y de aprendizaje; Desarrollo de los adolescentes III. Identidad y relaciones sociales; Observación y Práctica Docente I. Cuarto Semestre: Seminario de temas selectos de historia de la pedagogía y la educación I; Figuras y cuerpos geométricos; Plano cartesiano y funciones; Procesos de Cambio o variación; Planeación de la enseñanza y evaluación del aprendizaje; Desarrollo de los adolescentes IV. Procesos Cognitivos. Quinto Semestre: Seminario de Temas Selectos de la historia de la pedagogía y la educación II; Medición y cálculo geométrico; Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencia; Escalas y Semejanza; Opcional I; Atención educativa a los adolescentes en situaciones de riesgo; Observación y Práctica Docente III. Sexto Semestre: Seminario de Investigación en educación matemática; Seminario de Temas Selectos de la Historia de las matemáticas; Tecnología y didáctica de las matemáticas; La predicción y el azar; Presentación y tratamiento de la información; Opcional II; Gestión Escolar; Observación y Práctica Docente IV. Séptimo Semestre: Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo docente I; Trabajo Docente I. Octavo semestre: Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo docente II; Trabajo Docente II. En el año 2000, justo al inicio del siglo y del milenio, los integrantes de la especialidad de matemáticas propusieron a las autoridades respectivas el Programa Educativo de especialización en Educación Matemática como programa de postgrado para atender las necesidades de superación profesional a todos aquellos docentes que laboran en secundarias independientemente de su formación profesional inicial, así como a los egresados de la ENSM. La propuesta la coordinaron los profesores Santiago Valiente Barderas y Alejandra Ávalos Rogel. El programa contempla cuatro trimestres, la elaboración de tesina y su réplica pública para la obtención del grado de especialización. Se atendió una generación debido a que las autoridades superiores consideraron priorizar el programa de Maestría en Educación Básica, que no sólo atiende a egresados de la ENSM con especialidad en matemáticas, sino también a egresados de otras instituciones de formación docente inicial. Para esta época, los requerimientos del trabajo docente en todos sus niveles es cada vez más exigente. La preparación profesional, los estudios de postgrado, la actualización permanente, la membresía a sociedades del conocimiento, la integración de equipos de investigación (Cuerpos

Académicos), la publicación de los productos de investigación, la evaluación del trabajo docente y de investigación por parte de organismos externos y la acreditación de los servicios escolares son impuestos por organismos económicos internacionales, lo que obliga a las autoridades de países miembros de organizaciones internacionales a ajustar estas medidas a todos los rubros económicos, políticos y sociales. En materia de Educación no ha sido la excepción. Una vez que se aprueba el Acuerdo 384 que avala la Reforma de los Planes y Programas de Educación Secundaria 2006, sugiere en uno de sus Artículos la conformación de los Consejos Consultivos Interinstitucionales cuyo propósito es asesorar a las autoridades gubernamentales con relación a la aplicación y evaluación de esta propuesta educativa. Es así que a partir de 2007 y hasta la aplicación del acuerdo 592, integrantes de la especialidad de matemáticas colaboraron en estos Consejos en las asignaturas de Matemáticas y Ciencias. Estos cambios también son adaptados en la ENSM. En 2009 se inicia el proceso de autoevaluación del Programa Educativo de Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas que se consolida con el proceso de evaluación que realizaron los integrantes de los Comités Interinstitucionales para la Evaluación de la Educación Superior (CIEES). Una vez concluidos estos dos procesos, el último de ellos con la visita los evaluadores, el programa educativo fue acreditado con el Nivel 1 como resultado de la metodología de evaluación de los CIEES obteniendo el derecho de registrar al programa educativo LESM en el Padrón Nacional de Programas Educativos de Calidad, aunque, a pesar de este buen resultado el organismo emitió recomendaciones que debían atenderse (la mayoría de ellas de carácter administrativo en materia de recursos financieros). A partir de este resultado el Colegio de Profesores de la especialidad tomó la iniciativa de atender estos rubros. Es así que a partir del ciclo escolar 2011 – 2012 de crea el Cuerpo Académico en Formación (CAF) "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica", a iniciativa del Dr. Esnel Pérez Hernández, quien fue el Responsable de CAF hasta antes de su retiro de labores académicas con número de Registro ante el Programa de Desarrollo Profesional ENSMEX-CA-2. Inicialmente, lo conformaron 3 docentes más de tiempo completo. En la actualidad, el CAF ha producido una serie de artículos de investigación que han sido presentados en diversos Congresos nacionales e internacionales y además publicados. Sus dos líneas de investigación: Las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y Situaciones didácticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han contribuido a generar, además

de los productos de investigación, documentos recepcionales que los estudiantes de séptimo y octavo semestre del programa educativo elaboran bajo la asesoría de alguno de los integrantes del CAF. Además, la conformación de otro CAF perteneciente al Colegio de profesores de matemáticas ha empezado ya a generar productos de investigación. Otra categoría de los CIEES se relaciona con la aceptación de los egresados en el campo laboral. De acuerdo con los resultados de evaluaciones que se han venido imponiendo en todo el país, los egresados del programa educativo, en su gran mayoría, obtienen el puntaje necesario en el Concurso de Ingreso al Servicio Profesional Docente que los colocan en el rango de Idóneos. Estos datos confirman además, la preferencia por parte de los aspirantes al programa educativo LESM, que sigue siendo alta hasta la fecha. Por otra parte, la preparación profesional de los docentes de este programa educativo ha ido incrementándose con la obtención de grados académicos. Durante el ciclo escolar 2015 – 2016 el programa educativo LESM, fue evaluado nuevamente por los CIEES, revalidando estos comités el Nivel 1, con su respectiva acreditación, emitida el pasado mes de abril de este 2016. Los docentes – investigadores que actualmente laboran en la institución son: Gonzalo López Rueda quien a la fecha de este Congreso ocupa el cargo de Director del plantel además de ser un prolífico divulgador de las matemáticas a través de la elaboración de varios libros de texto y diversos artículos de investigación (fue miembro del Sistema Nacional de Investigadores SNI) ; Alfredo Cárdenas Meléndez, José Luis Galván Jiménez ambos con una reconocida trayectoria académica; María de Jesús Sientíes Nacaspac, autora de varios libros de texto; Héctor Cantú Lagunas con amplia y reconocida trayectoria académica y de gestión dentro de la Institución; Enrique Salazar Peña quien ha publicado diversos artículos de investigación como integrante del CAF antes mencionado; Francisco Guillermo Herrera Armendia representante del CA "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Docente y la Educación Básica", quien ha publicado numerosos artículos de investigación, es miembro de New York Academy of Sciences desde 2008, de la Sociedad Matemática Mexicana desde 2013, del Comité Científico para el Instituto para la Investigación y Coordinación de la Música y las Matemáticas (IRCAM) por sus siglas en francés en el Third International Congress on Music and Mathematics celebrado en Paris, Francia en 2011 y que fuera miembro del Consejo Consultivo Interinstitucional para las Ciencias ante la Secretaría de Educación Pública entre 2007 y 2011; Marleny Hernández Escobar autora de varios libros de texto y de diversos artículos de investigación y miembro de la Asociación Mexicana de

Investigadores en el uso de la Tecnología en la enseñanza de las Matemáticas; Gilberto Castillo Peña autor de varios libros de texto; Alejandra Ávalos Rogel de amplia y reconocida trayectoria académica; Erick Munguía Guzmán cuya trayectoria académica y de gestión ha sido de gran mérito; Marcos Fajardo Rendón quien ha publicado libros y muchos artículos de investigación enfocados al uso de las TIC y sistemas; Elideth Pacheco Salgado quien posee una impecable trayectoria académica dentro de la Institución; Eusebio Vargas Bello, Vitaliano Acevedo Silva, Marco Antonio Valadez quienes han publicado varios libros de texto para Educación secundaria y Educación Media Superior; Francisco Miguel Yañez Pichardo que ocupó el cargo de Presidente de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas en el Distrito Federal del 2003 al 2014 y promotor de las Olimpiadas Nacionales de Matemáticas por mucho tiempo; Daniel Cisneros Pérez, José Luis Quiroz Gleason, Alma Rosa Villagómez Zaval docentes de amplia y reconocida trayectoria académica; Elvia Rosa Ruíz Ledesma autora de textos de Matemáticas para el nivel medio superior; Andrés Zapata Uribe joven e innovador docente; Saúl Elizarrarás Bahena y Orlando Vázquez Pérez autores de libros de texto y numerosos artículos de investigación y quienes conforman un Cuerpo Académico en Formación "Matemática Educativa y Formación Docente" y que a partir de 2013 han generado productos de investigación con el rubro de Resolución de problemas con estudiantes del programa de Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas siendo presentados en eventos académicos tanto nacionales como internacionales; Carolina Rubí Real Ortega quien es coautora de los Libros de texto de Matemáticas para primero, segundo y tercero para Educación Secundaria; Maricela Bonilla González autora del Libro de texto para quinto grado de Educación Primaria titulado Metamorfosis Matemática 5 publicado recientemente. Es meritorio recordar a los profesores María del Carmen Azorín Bernárdez, Didya Alicia Rico Flores y Ezequiel Torreblanca Gaona de amplísima reconocida trayectoria académica; así como al profesor Esnel Pérez Hernández cuya labor en el rubro de la investigación y la difusión de conocimientos matemáticos ha quedado asentado en estas líneas. El trabajo docente y de investigación no puede detenerse, y es así que la organización de este Primer Congreso Nacional de las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje es un paso más en el largo camino de la transmisión del conocimiento matemático.

Ciudad de México, 6 y 7 de octubre de 2016.

Los Editores: Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón

P R E S E N T A C I Ó N

Este primer Congreso Nacional de Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje reunió a profesores, investigadores y estudiantes del área de las matemáticas y su didáctica de muchas partes de la República Mexicana, además de entusiastas estudiantes de escuelas secundarias de la zona centro y noroccidente de la Ciudad de México. Todos han dejado enseñanzas, y todos hemos aprendido algo como producto de la asistencia y participación en las actividades de este evento académico.

Se organizaron seis Líneas de Trabajo para la presentación de los trabajos de investigación, mismas que en esta edición se incluyen como capítulos.

El Capítulo 1 titulado "Contenidos del Pensamiento Matemático" incluye dos trabajos elaborados por el Cuerpo Académico que organizó el evento, ya que se tuvo necesidad de incluirlos debido a que no se recibieron propuestas en este sentido y no es pertinente dejarlo sin alguna participación.

El Capítulo 2, "Perspectivas sociales, antropológicas y cognitivas de la didáctica de las matemáticas" contiene nueve documentos.

EL Capítulo 3, "Experiencias en la docencia de las matemáticas y su reflexión" lo conforman un total de doce trabajos de investigación.

El Capítulo 4, "Las TIC en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas" engloba en total doce documentos de investigación.

El Capítulo 5, "Equidad, género e inclusión en la enseñanza – aprendizaje de matemáticas", está integrado por dos contribuciones.

El Capítulo 6, "El currículo en la enseñanza – aprendizaje de matemáticas" incluye en total cinco aportaciones.

En total son cuarenta y dos artículos de investigación que forman parte de este Primer Congreso de Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, con el firme propósito de contribuir a la generación y aplicación del conocimiento en el rubro de la educación matemática, y con el compromiso de aprovechar las áreas de oportunidad que permitirán la mejora de la organización y edición de futuros eventos académicos en nuestra institución, la Escuela Normal Superior de México, a través del CA "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la

Formación Inicial y la Educación Básica y el Colegio de la Especialidad de Matemáticas.

En este sentido, también asistieron al evento denominado "Primera Muestra de Habilidades Matemáticas para estudiantes de tercer grado de educación secundaria 2016: Arquímedes Caballero" un total de 61 entusiastas jóvenes de ambos sexos, quienes mostraron gusto, conocimiento y estrategia en la resolución de problemas propuestos y así dar evidencia del desarrollo de las cuatro competencias plasmadas en los Planes y Programas de Educación Básica en el área de matemáticas: Resolución de problemas, validación, comunicación y manejo de técnicas.

Se ofrecieron dos talleres: "Poligonizarte y Poliedrizarte con papel" a cargo del Profesor José Daniel Cisneros Pérez y "Actividades didácticas con tecnología para exploración de conceptos matemáticos" impartido por el Dr. Lorenzo Sánchez Alavez, cuyo propósito se centró en ofrecer otras alternativas didácticas con material manipulable y el uso de las TIC, dirigido a toda persona asistente interesada en el tema.

El evento tuvo un impacto de asistencia de más de 150 personas a las ponencias; a los cuales se les brindó constancias virtuales indexadas como asistentes, talleres y ponentes.

La memoria les brinda 3 ISBNs en distinto formato a los autores, misma que se encuentra indexada en isbn.org mediante Bookwire de Bowker.

Se indexó cada memoria por autor(es) para un mayor impacto en los motores de búsqueda científico.

Paralelamente se llevaron a cabo las transmisiones en vivo ingresando al sitio www.mathensm.org.mx en 3 canales de YouNow correspondientes a los 3 auditorios almacenando ponencias en el canal de Youtube.

Solo nos queda agradecer a nuestra Directora General, la Maestra María Luisa Gordillo Díaz, al director de la Escuela Normal Superior de México, Dr. Gonzalo López Rueda, a la Subdirectora Académica, Maestra Mercedes Takagui Carbajo, a la Subdirectora Administrativa, Lic. Araceli Cruz Ruíz, al Jefe del Departamento de División de Licenciatura, M. En C. Ernesto Uribe Gómez por su valioso apoyo para la realización de este evento, así como en especial, al M. en C. Marcos Fajardo Rendón, Jefe del Departamento de Investigación y Experimentación Educativa del turno matutino; a los integrantes y colaboradores del Cuerpo Académico y también, por supuesto a todos los miembros del Colegio de la Especialidad de Matemáticas.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Coordinador del Colegio de la Especialidad en Matemáticas de la

Escuela normal Superior de México, Turno Matutino.

Octubre de 2016

ÍNDICE

Título e ISBNs.....I

Directorio.....II

Comités.....III

Comité Científico.....VI

Cuerpo académico "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Docente y la Educación Básica" ENSMEX-CA2.....VIII

Prólogo.....IX

Presentación.....XXIII

CAPÍTULO I "Contenidos Del Pensamiento Matemático".....31

La noción de Distribución de probabilidad de Max Born en Física Cuántica. El Origen. *Francisco Guillermo Herrera Armendia. Marcos Fajardo Rendón. Isaac Villavicencio Gómez. Enrique Salazar Peña*.....32

Cardinalidad y Ordinalidad. Su importancia en la Teoría de Números. Una aproximación con base en la Teoría de Conjuntos. *Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón, Marleny Hernández Escobar*.....43

CAPÍTULO 2 "PERSPECTIVAS SOCIALES, ANTROPOLÓGICAS Y COGNITIVAS DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS".....47

La Cultura Matemática como detonante de una enseñanza y aprendizaje agradable en el aula. *Erick Solis Hernández*.....48

Representación de habilidades de lectura y resolución de problemas en educación básica. *Sofía de López Nava Tapia, Miguel Ángel Campos Hernández*.....54

Situaciones de modelación como práctica social generadora de saberes. Su gestión en educación secundaria. *Santiago Ramiro Velázquez, René Santos Lozano*.....59

Un acercamiento para identificar los niveles de Van Hiele en futuros docentes. *Luz María Cruz Ahumada, Miriam De Gante Nieves, Marleny Hernández Escobar*.....63

Dificultades en la resolución de problemas matemáticos en adolescentes. *Yair Hernández Ruíz*.....66

Análisis del pensamiento lógico matemático en los alumnos del Tecnológico de Altamira. *Álvaro Fabio Hernández Maldonado, Sandra Guadalupe Gómez Flores, Guadalupe Torres González, Mónica Yolanda Espinosa López, Jorge Gilberto Guerrero Ruiz*.....71

Creencias que tienen los profesores de matemáticas sobre las dificultades de elaborar pruebas basadas en la resolución de problemas verbales. Caso ITM. *María Elisa Espinosa Valdés, Rosario Díaz Nolasco, Ruth Icela Sosa Bielma, Flor de Azalea López Robles, Ricardo Moroni Zuvirie González*.....76

Análisis comparativo de pretest y postest para determinar los prerrequisitos matemáticos en un curso de Cálculo diferencial en el primer año del nivel superior. *Magally Martínez Reyes, Anabelem Soberanes Martín, José Luis Castillo Mendoza*.....80

La gestión de procesos de aprendizaje auténticos del álgebra simbólica en educación secundaria. *Juan Manuel Córdoba Medina, María Leticia Rodríguez González*.....86

CAPÍTULO 3 "EXPERIENCIAS EN LA DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS Y SU REFLEXIÓN".....92

Estrategias de enseñanza para alumnos de biología. *Melisa Gutiérrez Juárez*...93

Proyecto integrador en el aula de matemáticas como estrategia de aprendizaje para futuros ingenieros. *Viridiana Jiménez Martínez, María del Consuelo Macías González, Rosa Araceli De los Santos Ramírez*.....96

Identificando los errores algebraicos de los alumnos de Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros. *Ana María Martínez Blancarte*.....100

Resolución de problemas sobre optimización sin cálculo con estudiantes de bachillerato: una experiencia de enseñanza. *Saúl Elizarrarás Bahena*.....106

La enseñanza de las fracciones como parte – todo mediante los modelos de Kieren. *Yuliana Bautista Castillo*.....113

Un análisis de los significados de enseñanza del Teorema de Bayes. *Jorge Carlos Tuyub Moreno, Jesús Enrique Pinto Sosa, Martha Imelda Jarero Kumul*.....118

El uso de material didáctico en la enseñanza de las matemáticas. *Mónica Cruz Rodriguez, Carolina Cervantes Hernández*.....123

Nepohualtzintzin: una experiencia docente en matemáticas. *Álvaro Martín Vázquez Leyva*.....126

Aspectos del tránsito del pensamiento algebraico elemental al pensamiento matemático superior en la educación básica. *Alejandra Ávalos Rogel, Gilberto Castillo Peña, Lucio Agustín Rodríguez de Jesús*.....131

Dificultades de los docentes en formación con el estudio de las cuadraturas de figuras planas y su trabajo áulico con base en la tipología didáctica de Brousseau. *Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón, Marleny Hernández Escobar, Isaac Villavicencio Gómez*.....135

Teoría vs. Realidad. *Dulce Carolina Ruíz Castañeda*.....141

El trabajo áulico con la tipología de Brousseau para la reafirmación del concepto *X(0) = 0*. *Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón, Raciel Trejo Reséndiz, Isaac Villavicencio Gómez*.....147

CAPÍTULO 4 "LAS TIC EN LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS".....150

Escenarios Didácticos virtuales para el aprendizaje de matemáticas. *Domingo Márquez Ortega, Juan Carlos Axotla García, Miguel de Nazareth Pineda Becerril*.....151

El uso de la computadora en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. *Iris Betsabé Dominguez Orduña*.....155

Uso de Recursos en la resolución de problemas no rutinarios. *Clara Mayo Juárez y Ulises Xolocotzin Eligio*.....160

Hacia la construcción conceptual de fracciones equivalentes mediante las TIC. *Rafael Córdoba Del Valle*.....165

Actividades didácticas para la enseñanza de las funciones racionales en Excel. *Elvia Ruíz. Femín Acosta Magallenes. Alma Rosa Villagómez Zavala*.....171

Experiencia docente, un acercamiento al modelo de Van Hiele a través del análisis de las propiedades de rotación y traslación de figuras, utilzando Geogebra. *Brenda Aisel Ramírez de la Rosa, Sonia Monserrat Cruz Venegas, Marleny Hernández Escobar*.....174

Un cuestionario de contenido "Común" con temas de Círculos apoyados para su solución en el Software Geogebra. *Marleny Hernández Escobar*.....179

Uso de pizarrón interactivo para la enseñanza de las matemáticas. *Luis Cruz Kuri, Juan Ruíz Ramírez*.....184

Las matemáticas en la Educación en Línea. *Socorro Juárez Contreras, Isaac Villavicencio Gómez*.....187

Diseño de un sistema neurodifuso de conversión PWM a motoreductor CD: Modelado y aplicación. *Marcos Fajardo Rendón, Francisco Guillermo Herrera Armendia, María de Jesús Sentíes Nacaspac, Isaac Villavicencio Gómez*.....192

La ecuación de la recta en la ergonomía. *Omar García de la Rosa, María de Lourdes Olivares Estrada, Leonardo Ceciliano Hernández, Héctor García de la Rosa, Francisco Javier García Ramírez*.....198

CAPÍTULO 5 “EQUIDAD, GÉNERO E INCLUSIÓN EN LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS”.....203

La modelación y simulación como apoyo didáctico a la enseñanza de las matemáticas. *César Pérez Córdova, Silvia Contreras Bonilla, José Luis Macías Ponce, Yatzuki Lucero de Castilla Rosales, Marilyn Fortíz Téllez*.....204

La didáctica de la matemática como estrategia para enriquecer la inclusión educativa. *Erick Solis Hernández*.....208

CAPÍTULO 6 “EL CURRÍCULO EN LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS”.....215

Diseño de reactivos integradores. Una reflexión y necesidad de los docentes de ciencias básicas. *Fidel Morales Couoh, Alvaro José Leal Osorio, René Aarón Canché González y Ricardo Yam Ucán*.....216

Didáctica en la enseñanza de la Geometría en educación secundaria. *Arlene Díaz Ruíz, Itzel Santiago Rodríguez*.....222

Modelos de causas y consecuencias del aprendizaje de matemáticas. Enfoque sistémico. *Fernando Gustavo Isa Massa*.....225

Identificación y atención a niños con aptitudes sobresalientes en el Estado de Hidalgo. *J. C. Tuyub- Moreno, M. A. Espíndola-Lugo, J. A. Roque-Pacheco, M. G. González-García, M. G. Cruz-Ramírez*.....233

La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria rural del Estado de Hidalgo. *Lorena Trejo Guerrero*.....237

CAPÍTULO 1

"CONTENIDOS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO"

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La noción de distribución de probabilidad de Max Born en Física Cuántica. El Origen.

Francisco Guillermo Herrera Armendia[1], Marcos Fajardo Rendón[1]. Isaac Villavicencio Gómez[1], Enrique Salazar Peña[1].
[1]Escuela Normal Superior de México, Departamento de Matemáticas. Cuerpo Académico "Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en la Formación Inicial y Educación Básica", Av. Manuel Salazar No. 201 Colonia Ex – Hacienda El Rosario, Ciudad de México.
harmendia@gmail.com.

***Resumen*- En uno de sus libros [1] Max Born argumentó que el último criterio de la verdad científica es la conciliación plena entre la teoría y la práctica, y solamente cuando todos los esfuerzos por describir los hechos a través de ideas institucionalizadas falla, es cuando nuevas nociones surgen, cautelosas en principio, pero triunfantes después al ser confirmadas por el proceso de experimentación y es así que el pensamiento filosófico de la ciencia clásica se ha transformado en pensamiento filosófico moderno y que culmina con el trabajo propuesto por Niels Bohr titulado "Principio de completitud"; Born fue un productivo investigador científico y durante 3 décadas abordó temas relacionados con la física moderna. Dentro de sus primeras publicaciones se encuentra la Teoría de la relatividad propuesta por Einstein [2].**

Abstract-In a Max Born book [1] the autor argued ultimate criterion of the scientific truth is the full reconciliation between theory and practice, and only when all efforts to describe the facts through institutionalized thinking fails, when new arise notions, cautious at first but triumphant after being confirmed by the experimentation process and is so philosophical thought of classical science has been transformed into modern philosophical thought and culminating with the one proposed by Niels Bohr work entitled "completeness principle"; Born was a productive scientific researcher and for 3 decades made works related to modern physics. His first publication is the theory of relativity proposed by Einstein [2].

Palabras- clave. Probabilidad, Distribución de Max Born, Física cuántica, Historia de las Matemáticas.

Keywords- Probability, Max Born´s Distribution, Quantum Physics, Math history.

I. Introducción

Un producto de investigación importante de Born se titula: "Interpretación estadística de la Mecánica Cuántica" y se publicó por vez primera en inglés [3] el viernes 14 de octubre de 1955 traducida del alemán por el profesor Robert Schlapp entonces miembro del colegio de física matemática de la Universidad de Edimburgo en Escocia y corresponde a la conferencia que ofreció Born en Estocolmo, Suecia al ser galardonado con el Premio Nobel de Física el sábado 11 de diciembre de 1954 y que compartió con Walter Bothe*.

En esos años, el Dr. Born residía en Bad Pyrmont, ciudad de la antigua Alemania Federal. Se dedicaba a la docencia, además de dirigir el Instituto de Física Teórica de la Universidad de Göttingen. Poseía la Cátedra Stoke en el área de Matemáticas en la Universidad de Cambridge y la Cátedra Tait en el área de Filosofía Natural en la Universidad de Edimburgo, ambas en el Reino Unido.

Como Born puntualizara al principio de su conferencia, su trabajo no se relacionaba con un nuevo descubrimiento de algún fenómeno de la naturaleza sino más bien con una nueva forma de pensar acerca de estos fenómenos naturales. Mucho de su trabajo en la Universidad de Göttingen contribuyó a aclarar la crisis intelectual del pensamiento científico a causa del descubrimiento de Planck, en 1900, relacionado con la acción de los "cuantos". Sin embargo, a mediados del siglo XX el pensamiento científico volvía a entrar en crisis intelectual, aunque

---

El artículo lo elaboró Max Born en primera persona. Es un excelente ejemplo que muestra la forma de narrar acontecimientos científicos de primer orden y ante un público muy selecto. Algunos estudiantes de posgrado en el área educativa tienen la errónea idea de escribir sus producciones en tercera persona, argumentando seriedad absoluta, pese a que investigadores en educación como Simon Goodchild y Lyn Enlgish en su texto Researching Mathematics classrooms. A critical Examination of Methodology, publicado en 2002, sostienen que debe escribirse en primera persona. En este

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

sentido es una muestra maravillosa de didáctica del conocimiento científico.

relacionada con aspectos lógicos y epistemológicos que los descubrimientos de fenómenos relacionados con la física nuclear generaban. Además, otro aspecto notorio fue que no todos los físicos de esa época aceptaban el desarrollo del pensamiento científico entonces acordado por muchos con relación a la teoría cuántica, el mismo Planck fue un escéptico de este pensamiento, hasta su muerte.

Einstein, de Broglie y Schrödinger nunca cesaron de enfatizar las características poco convincentes de la mecánica cuántica y demandaban la reutilización de conceptos de la física clásica, sobre todo las ideas de Newton o inclusive del pensamiento de la antigua Grecia [4], con el propósito fundamental de que las ideas acordadas no fueran contrarias a los resultados experimentales que se observaban. Inclusive, el mismo Niels Bohr había tenido muchos problemas para intentar refutar estas objeciones. Estas dificultades fueron ponderadas por Born para que decidiese contribuir en el intento de clarificar la situación, tomando en cuenta que penetraba en el estrecho y difícil límite entre la filosofía y la física (públicamente solicitó comprensión al auditorio, pues su trabajo abordaba tanto la historia como la filosofía.

II. Las raíces de la mecánica cuántica.

Al principio de la década de los 20 del siglo anterior, Born tenía la idea de que los físicos estaban de acuerdo con la hipótesis de Planck acerca de que la energía oscilante de frecuencia definida $\boldsymbol{\nu}$ (como el caso de las ondas luminosas) se manifiesta en cuántos definidos de tamaño $\boldsymbol{h\nu}$**.** Gran cantidad de experimentos se podían comprobar de esta manera, y siempre mantenían el mismo valor a la constante de Planck $\boldsymbol{h}$. Más aún, la aseveración de Einstein acerca de que los cuantos luminosos poseían un momento $\frac{\boldsymbol{h\nu}}{c}$ (siendo *c* la velocidad de la luz), era bien confirmada en los experimentos, lo que significó una renovación en el pensamiento científico relacionado con la teoría corpuscular de la luz que incluía cierta complejidad del fenómeno, aunque para otros procesos esta teoría era bastante apropiada, así que los físicos estaban acostumbrados a esta dualidad, es más, la aprendieron a manejar a pesar de las limitaciones de esos momentos.

En 1913, Niels Bohr había resuelto el enigma de las líneas espectrales utilizando la teoría cuántica, a la vez que había explicado las principales características: la maravillosa estabilidad de los átomos, la estructura de los núcleos atómicos y el sistema periódico de los elementos. Como resultado, un importante pensamiento producto de las enseñanzas de Bohr era: un sistema atómico no puede existir en todos los estados mecánicamente posibles que forman un continuo, pero sí en series de estados "estacionarios discretos"; en una transición (de uno a otro estado) la diferencia energética $E_m - E_n$ se emite o se absorbe como un *cuanto* de luz $\boldsymbol{h\nu}_{mn}$ (con el acuerdo de que E_m es mayor o menor que E_n). Esta es una interpretación, en términos de la energía, de la Ley Fundamental de la Espectroscopía descubierta hacía unos años por W. Ritz. Tal situación se puede esquematizar al escribir, en forma de arreglo rectangular, los niveles de energía de los estados estacionarios *n* veces (horizontal y verticalmente):

	E_1	E_2	E_3 ….
E_1	11	12	13
E_2	21	22	23
E_3	31	32	33

En los que las posiciones sobre la diagonal corresponden a los estados y las otras posiciones a las transiciones. Sin embargo, Bohr estaba consciente de que esta ley así formulada, entraba en conflicto con la mecánica y que por ello todo uso del concepto de energía en este contexto causaba enormes problemas. Él sostenía esta unión de conceptos nuevos con los anteriores con su principio de correspondencia, que consistía de un requerimiento obvio: la mecánica clásica ordinaria debía apoyarse de un alto grado de aproximación al límite, pues los números que corresponden a los estados estacionarios (números cuánticos) son muy grandes (en la esquematización del arreglo rectangular se identifican muy a la derecha y al fondo del mismo), por lo que se aprecia cambios de energía relativamente pequeños, de lugar a lugar, es decir, relativamente pequeños. La física teórica trabajó con estos conceptos durante los siguientes 10 años. El problema era que un oscilador armónico no sólo posee frecuencia, sino también una intensidad. De tal forma, que para cada transición representada en el esquema debe existir su correspondiente intensidad. ¿De qué manera, por fin, se puede encontrar una relación basándose en las consideraciones de la correspondencia mencionada? Tal cuestionamiento mostraba

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

todavía conocimientos limitados, a pesar de los notables éxitos alcanzados por el propio Bohr, además de notables investigadores como Kramers, Sommerfeld, Epstein y muchos otros más, aunque el paso decisivo fue hecho nuevamente por Einstein, quien al proponer un nuevo tratamiento al proceso de derivación de la fórmula de la radiación de Planck, hizo evidente que el concepto clásico de la intensidad de emisión debía ser reemplazado por la idea estadística de la probabilidad de transición. En el esquema propuesto, para cada posición representada allí, le corresponde, además de la frecuencia $\nu_{mn} = \frac{(E_m - E_n)}{h}$, una cierta probabilidad para la transición acompañada por la emisión o absorción de radiación. En Göttingen, Born y su equipo también hicieron muchos intentos por explicar los procesos mecánicos del átomo desconocidos hasta entonces, más allá de los resultados experimentales obtenidos. De hecho, la dificultad lógica se volvía cada vez más aguda. Las investigaciones realizadas con la identificación de puntos luminosos esparcidos aquí y allá, así como aquellas vinculadas con la dispersión de la luz mostraban que la concepción de Einstein acerca de la probabilidad de transición como una medida de la fuerza de una oscilación no era la más adecuada, y que la idea de una amplitud de oscilación asociada con cada transición no podía ser aceptada. Max Born sustenta esta afirmación al mencionar los resultados de las investigaciones hechas por Ladenburg [5], Kramers [6], Heisenberg [7], Jordan y él mismo [8]. El arte de conjeturar fórmulas correctas que surgen de las fórmulas clásicas, pero que las sobrepasan en el sentido del principio de correspondencia requiere de extrema precisión. En un artículo escrito anteriormente por Born, incluyó en el título la expresión "Mecánica Cuántica", tal vez único en esos días, ese documento incluía una fórmula muy enmarañada (pero válida todavía a principios de los 60 del siglo anterior), que describía la mutua perturbación de sistemas atómicos.

III. La Teoría de W. Heisenberg.

De acuerdo con Born, durante este periodo Heisenberg tuvo un repentino cambio en su estado de salud [9]. Él había sido su asistente en esos días. Sin embargo, Heisenberg reemplazó el principio filosófico del arte de conjeturar por las reglas matemáticas. Una de las premisas en que se basa este principio, asegura que los conceptos y los esquemas que no corresponden a los hechos físicamente observables, no deberían utilizarse en las descripciones teóricas. Al elaborar Einstein su teoría de la relatividad, eliminó los conceptos de velocidad absoluta de un cuerpo y el de simultaneidad absoluta de dos eventos en lugares diferentes, es decir, estaba utilizando el principio filosófico para conjeturar. Heisenberg eliminó la imagen (mental) de las órbitas de los electrones con radios definidos y periodos de rotación, ya que estas cantidades no son observables. Él aseguraba que la teoría se debería construir a partir de arreglos cuadráticos (como los mostrados anteriormente). En lugar de describir el movimiento a través de una coordenada dada como una función del tiempo *x(t)*, se debía determinar un arreglo de transición de probabilidades x_{mn} . Para Born, la parte decisiva del trabajo de Heisenberg es la necesidad de poder encontrar una regla a través de la que a partir de un arreglo dado:

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} \ldots\ldots \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$$

O en un arreglo cuadrático dado:

$$\begin{matrix} (x^2)_{11} & (x^2)_{12} \ldots \\ (x^2)_{21} & (x^2)_{22} \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$$

Aplicando en general la propiedad multiplicativa a tales arreglos.

Al considerar ejemplos conocidos y descubiertos a través del uso de la conjetura,

Heisenberg logró encontrar una regla y aplicarla con éxito a ejemplos sencillos como es el caso de los osciladores tanto armónico como inarmónico. Pero durante el verano de 1925, Heisenberg enfermó gravemente de fiebre del heno, por lo que el tratamiento médico lo obligó a ausentarse de sus tareas de investigación para reposar en las playas, pero dejando listo su artículo para ser publicado, en manos de Born, quien clarificó sus ideas al respecto después de leerlo. Born lo envió al *Zeitschrift für Physik* (Revista de Física). La regla de la multiplicación propuesta por Heisenberg no dejó en paz a Born, y después de una semana de intensas reflexiones, pensamientos e intentos por aclarar sus dudas, repentinamente recordó una teoría algebraica que había aprendido de su maestro, Rosanes, en Breslau. Tales arreglos cuadráticos son muy familiares para los matemáticos y los nombran matrices, en asociación con una regla definida de la multiplicación. Así es que Born aplicó esta regla a la condición cuántica de Heisenberg y encontró que concordaba con la diagonal de sus elementos. Era obvio conjeturar

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

que los elementos sobrantes debían ser, digamos, nulos. De ese modo surgió en la mente de Born la extraña fórmula:

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi}\,.$$

(Existe un interesante ensayo elaborado por Armando Martínez al respecto, [10]. También es importante mencionar que tanto en este ensayo como en la traducción hecha por el Profesor Robert Schlapp del alemán al inglés de la conferencia impartida por Born en Estocolmo, y en sus propias cartas, la fórmula está escrita como sigue: $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$. En el número 3172, Vol. 122 del 14 de octubre de 1955 de la revista Science, aparece sin la letra i, correspondiente al número imaginario, en el denominador del lado derecho de la expresión).

El significado en la expresión propuesta por Born, las coordenadas q y los momentos p no van a ser representados por valores de números sino por símbolos cuyo producto depende del orden de multiplicación y que no "conmutan" como se suele decir. Born describió este momento comparándolo con el ánimo que muestra, por ejemplo, un marinero que lleva mucho tiempo en el mar y de momento, logra ver a la lejanía, la costa anhelada. Su único pesar fue que Heisenberg no estaba con él en esos momentos. Realmente estaba convencido de que por fin, habían tropezado con la verdad. Gran parte de estos esfuerzos fueron trabajo de conjetura, particularmente el hecho de eliminar los elementos sobre las no diagonales en el arreglo descrito anteriormente. Para solventar esta dificultad Born contaba con la colaboración de su estudiante Pacual Jordan, así que en pocos días tuvieron éxito al comprobar lo que Born había conjeturado correctamente. El artículo compartido ente Born y Jordan [11] describe los principios más importantes de la mecánica cuántica, que incluye una extensión al tratamiento de la electrodinámica. A esto siguió un frenético periodo de colaboración entre los tres científicos (Born, Heisenberg y Jordan), pese a la lejana estancia del segundo de ellos, así que hubo un intenso intercambio de cartas, aunque la participación de Born se vio afectada a causa de los desórdenes políticos. Sin embargo lograron publicar conjuntamente [12] con alto grado de formalidad en el ambiente científico, lo que les permitió completar las ideas científicas de esos momentos. Sin embargo, antes de que este artículo se publicara y para su gran sorpresa, apareció publicado un artículo de Paul Dirac [13] que difundía conocimientos científicos sobre el mismo tema. Dirac asistió, tiempo atrás, a una conferencia que impartió Heisenberg en Cambridge, lo que le motivó a profundizar en el tema, y después de sus investigaciones obtuvo resultados parecidos a los del equipo de Born en Göttingen, con la diferencia de que Dirac no aplicó el recurso de la teoría matemática de las matrices, sino que descubrió por él mismo el proceso, para después proponer una especie de doctrina sobre tales símbolos no conmutativos. La primera aplicación no trivial además de físicamente importante de la mecánica cuántica la propuso poco después W. Pauli [14], quien calculó los valores de la energía estacionaria del átomo de hidrógeno usando el método de las matrices y proponiendo un arreglo completo que concordó con las fórmulas de Bohr. A partir de entonces ya no había más dudas acerca de la validez de la teoría.

IV. Mecánica Ondulatoria.

La ciencia (y el lenguaje) que posee real significancia de su formalismo es a veces una ciencia (o lenguaje) poco claro para quienes la utilizan. Como sucede con frecuencia, las matemáticas son mucho más que un pensamiento interpretativo. Justo cuando el equipo de Born discutía sobre esto, les llegó la segunda gran sorpresa: la publicación de los celebrados artículos de Erwin Schrödinger [15] que fueron producto de sus investigaciones que siguieron una línea de pensamiento completamente diferente, que se derivó de los trabajos de Louis de Broglie [16] quien les llevaba algunos años de ventaja al equipo de Göttingen y que apoyaba sus productos de investigación con una brillante consideración teórica: la dualidad corpúsculo – ondulatoria, familiar para los físicos en el caso de la luz, por lo que también debía ser exhibida por los electrones; cada electrón que se mueve libremente, debe poseer, de acuerdo con estas ideas, una longitud de onda perfectamente definida y que se determina con base en la constante de Planck y la masa. Este excitante experimento propuesto por de Broglie fue bien conocido por el equipo de Born.

Un día de 1925, Born recibió una carta firmada por C. J. Davisson en la que describía resultados singulares relacionados con la reflexión de electrones sobre superficies metálicas. Uno de los colegas de Born, James Franck, dedicado a la experimentación en laboratorio, junto con él, conjeturaron de inmediato que la evidencia de este fenómeno en forma de curvas (curvas de Daavisson) eran espectros de entramados de cristal

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

de las ondas electrónicas descritas por de Broglie. El equipo preparó un experimento para mostrarlo a sus estudiantes. Uno de ellos, W. Elsasser [17] se dedicó a investigar sobre este tema. Sus resultados ofrecieron la primera prueba cuantitativa de la idea de Louis de Broglie, prueba también obtenida independiente y posteriormente por Davisson y Germer [18] y por J. P. Thomson [19], con base en experimentos totalmente sistematizados. Sin embargo, esta familiaridad marcada por los resultados de las investigaciones así como el pensamiento de Louis de Broglie no tuvieron más alcance que para aplicaciones relacionadas con la estructura electrónica de los átomos. Eso estaba reservado para Schrödinger quien amplió la ecuación de onda propuesta por Louis de Broglie y la aplicó al movimiento libre, para el caso en que las fuerzas actúan y ofrecen una exacta formulación de las condiciones adicionales, ya insinuadas por Louis de Broglie, a las que la función de onda ψ se debía de ajustar, es decir, que debía poseer un valor único y finito en el espacio y el tiempo, teniendo éxito al derivar los estados estacionarios del átomo de hidrógeno como soluciones monocromáticas de su ecuación de onda no extendida al infinito. Mientras tanto, a principios de 1926 parecía como si repentinamente existiesen dos sistemas auto-contenidos pero completamente diferentes entre sí que explicaban los fenómenos en esta rama del conocimiento: la mecánica de matrices y la mecánica ondulatoria. Erwin Schrödinger pronto demostró la completa equivalencia de estos sistemas.

La mecánica ondulatoria gozó de gran popularidad como una versión de la mecánica cuántica tanto en Göttingen como en Cambridge, pues funcionaba con base en la función de onda ψ , la cual, al menos en el caso de una partícula, se puede representar en el espacio, y emplea los métodos matemáticos relacionados con las ecuaciones diferenciales parciales que son familiares para todos los físicos. Schrödinger supuso que su teoría ondulatoria hacía posible el regreso a la física clásica determinística; él proponía abandonar completamente la representación esquemática de las partículas y describir a los electrones no como partículas sino como distribución contínua de densidad $|\psi|^2$, o también establecida como densidad eléctrica $e|\psi|^2$, (situación que a mediados del siglo XX Schrödinger reafirmó [20]). Pero en Göttingen, para el equipo de Born, esta interpretación era poco aceptable por el lado de los hechos experimentales. Por esa época era ya posible realizar el conteo de partículas utilizando la técnica de centelleo o con el uso del Contador Geiger y fotografiar sus rastros con ayuda del dispositivo tecnológico conocido como la Cámara de nube de Wilson.

V. La Función Psi

Durante ciertos momentos Born dudaba de lograr una clara y correcta interpretación de la función ψ al considerar los saltos electrónicos, y realmente batalló durante todo el año de 1925 para lograr extender el método de matrices, que obviamente explicaba solamente los procesos oscilatorios, a la aplicabilidad para con los procesos aperiódicos. En esa época fue profesor huésped en el Instituto de Tecnología Massachusetts (MIT) en Cambridge, E. U., donde tuvo la oportunidad de interactuar con un distinguido colega: Norbert Wiener. Trabajando colaborativamente publicaron un artículo [21] en el que justificaron el reemplazo de las matrices por el concepto general de un operador y, de esta forma, hicieron posible la descripción de los procesos aperiódicos. Aun así no abordaron la verdadera aproximación como tal, por lo que Born utilizó el método propuesto por Schrödinger pues era muy promisorio para abordar de mejor manera una interpretación de la función ψ. Pero de nueva cuenta, una idea de Einstein le sirvió de guía. Él ya había propuesto observar la dualidad de las partículas (cuantos o fotones de luz) y las ondas para hacer comprensible la interpretación del cuadrado de la amplitud óptica de la onda como la densidad de probabilidad para la ocurrencia de los fotones. Esta idea pudo extenderse de inmediato a la función ψ : dando por resultado $|\psi|^2$ que representa la densidad de probabilidad para los electrones (u otras partículas). Afirmarlo era cosa sencilla, pero ¿cómo debía demostrarse? Para este propósito sugirió el equipo de Born observar los procesos de dispersión atómica. Una muestra de electrones que provienen de una distancia infinita, representados por una onda incidente de intensidad conocida (que es $|\psi|^2$) afecta a un obstáculo, digamos un átomo de un elemento pesado, de la misma forma que una onda de agua generada por un haz de vapor forma ondas circulares secundarias en un recipiente, la onda de electrones incidente es parcialmente transformada por un átomo en una onda esférica secundaria, cuya amplitud de oscilación ψ es diferente en distintas direcciones. Es así que el cuadrado de la amplitud de esta onda a una gran distancia del centro de dispersión permite determinar la probabilidad relativa de dispersión en su dependencia sobre una dirección dada. En suma, si la dispersión atómica es en sí capaz de existir en diferentes estados estacionarios, es posible obtener casi automáticamente y

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

partiendo de la ecuación de onda de Schrödinger las probabilidades de excitación de estos estados cuando el electrón se dispersa con pérdida de energía, o inelásticamente, como se le ha llamado. De esta manera fue posible comprobar las conjeturas de la teoría de Bohr, primeramente verificadas experimentalmente por Franck y Hertz y sustentando una base teórica [22]. Poco después Wentzel [23] tuvo éxito al derivar la celebrada fórmula de Rutherford para explicar la dispersión de las partículas alfa partiendo de la teoría de Born. El factor que contribuyó más aun que estos éxitos obtenidos para la rápida aceptación de la interpretación estadística de la función ψ fue sin duda el artículo publicado por Heisenberg [24] que contenía su celebrado principio de incertidumbre a través del que el carácter revolucionario de esta nueva concepción fue primeramente aclarado. En ese documento, Heisenberg argumentó que era necesario abandonar no solamente la física clásica sino también la ingeniosa y sencilla concepción mental acerca de la realidad que pensaba que las partículas de la física atómica eran como gránulos de arena extremadamente pequeños. Es evidente que un grano de arena posee a cada instante una posición y una velocidad definidas, pero este no es el caso para un electrón; si se pudiera determinar su posición con gran precisión, la posibilidad de determinar la velocidad sería mínima y viceversa.

Con relación a la teoría de las colisiones Born utilizó técnicas matemáticas de aproximación que resultaron ser, de algún modo, primitivas y que no eran demostrables. Otros autores abordaron también el tema y fueron de los primeros en hacerlo y con quienes la teoría está en deuda, ya que gracias a sus resultados, ha habido gran progreso: Holtsmark, en Noruega; Faxén, en Suecia; Bethe, en Alemania; Mott y Massey, en Inglaterra. Durante la segunda mitad del siglo XX, la teoría de las colisiones fue una ciencia especial, con sus propios textos. Las ramificaciones del pensamiento físico de aquella época, como la electrodinámica cuántica, la teoría de mesones, núcleos y rayos cósmicos, las partículas elementales y sus transformaciones, todas ellas pertenecían o tuvieron su origen en la teoría de las colisiones.

VI. Probabilidad de transiciones.

Durante los años de 1926 y 1927, Born intentó abordar otra forma de justificar la concepción estadística de la mecánica cuántica, con la colaboración del científico ruso Fock [25]. En el artículo escrito por Born, Heisenberg y Jordan está un capítulo en el que describen cómo la función de Schrödinger se anticipa realmente al pensamiento científico de la época, solo que no se pensaba como una función ψ en el espacio, sino como una función ψ_n con índices discretos *n= 1,2,…* los cuáles enumeran los estados estacionarios. Si el sistema bajo consideración es afectado por una fuerza que es variable en el tiempo, ψ_n también llega a ser dependiente del tiempo, por lo que $|\psi_n(t)|^2$ denota la probabilidad relacionada con la existencia de un estado *n* en un tiempo *t*. Comenzando desde una distribución inicial en la que solamente un estado esta presente, es posible obtener de esta forma la probabilidad de transición e iniciar investigaciones sobre sus propiedades. El interés del equipo de Göttingen se centraba en lo que en aquella época sucedía con el caso del límite adiabático, es decir, el caso de una acción de variación externa muy lenta; pensaban que era posible mostrar que, como se podría esperar, las probabilidades de transición llegaban a ser siempre muy pequeñas. La teoría de la transición de probabilidades fue desarrollada independientemente por Paul Dirac quien realizó importantes resultados, por lo que es un hecho que todos los productos de investigación relacionados con física atómica y nuclear que involucraban además estos sistemas de conceptos y escritos de forma elegante surgieron al seguirlo [26]; la mayoría de los experimentos realizados contribuyeron a establecer los fundamentos de las probabilidades relativas de eventos cuánticos. Entonces, ¿Cómo es que se siguieron descubriendo fenómenos relacionados con estos temas a pesar de que Einstein, Schrödinger y de Broglie no estaban convencidos? Una cosa es cierta. Las objeciones de ellos no estaban en contra de la exactitud de las fórmulas sino de su interpretación. Es así que se deben distinguir dos puntos de vista muy importantes: la cuestión del determinismo y la cuestión de la realidad. La mecánica newtoniana es determinista en todos los sentidos. Si el estado inicial (posiciones y velocidades de todas las partículas) de un sistema es correctamente establecido, el estado en cualquier otro lapso de tiempo (antes o después) se puede calcular aplicando las leyes de la mecánica. Todas las otras ramas de la física clásica se han establecido siguiendo este patrón lógico. La mecánica determinista gradualmente llegó a ser percibida como un acto de fe (el universo visto como una máquina, como un autómata). De acuerdo con el pensamiento de Born, estas ideas no tienen antecedentes ni en la antigüedad ni en la época medieval, más bien es un producto del inmenso éxito de la mecánica newtoniana, especialmente en

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

astronomía, y a tal grado que durante el siglo XIX se convirtió en un principio filosófico fundamental para todas las ciencias exactas. De lo anterior, surge la pregunta acerca de si esta forma de pensar estaba realmente justificada. ¿Se pueden hacer siempre predicciones absolutas basándose en las ecuaciones clásicas del movimiento? Es fácil observar, con base en ejemplos simples, que esto es posible sólo para casos en los que adoptamos la posibilidad de obtener mediciones absolutamente seguras (de la posición, velocidad y otras magnitudes). Consideremos una partícula en movimiento, sin fricción y siguiendo una trayectoria en línea recta entre dos puntos (digamos muros) y en los que al alcanzarlos sufre como consecuencia un retroceso perfectamente elástico. Es así que la partícula se mueve de un punto al otro con velocidad constante igual a su velocidad inicial v_0 , por lo que se puede afirmar con certeza el lugar donde puede estar localizada en un tiempo dado, puesto que v_0 es perfectamente conocido. Pero si de momento tenemos una pequeña imprecisión Δv_0 , entonces tendremos necesariamente una imprecisión relacionada con la predicción de la posición de la partícula en un tiempo t que es $t\Delta v_0$ lo que significa que incrementa con el tiempo t. Si esperamos lo suficiente hasta un tiempo $t_c = \frac{l}{\Delta v_0}$, donde c es la distancia entre los dos puntos (muros) elásticos, la inexactitud Δx llegará a ser igual al intervalo total l. De esta manera no es posible afirmar algo sobre la posición de la partícula en un tiempo posterior a t_c . Es así que el determinismo llega a ser completamente indeterminado, cuando se admite la más pequeña inexactitud in los datos relacionados con la velocidad. ¿Existe algún sentido (físico, no metafísico) con el que se pueda hablar de datos absolutos? Es completamente justificable afirmar que la coordenada x tiene el valor $\pi\ cm$, con $\pi = 3.1415926535$ ... ¿Es este número trascendental muy conocido que permite determinar la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro? Como un instrumento de matemáticas, el concepto de número real representado por un decimal infinito y es extremadamente importante y fructífero, pero como una medida de una cantidad física, el concepto es absurdo. Si la parte decimal del número π se interrumpe en el lugar 20 o en el 25, se obtienen dos números que no se pueden distinguir entre ellos por ninguna medida, ni tampoco del valor verdadero. De acuerdo con el principio heurístico empleado por Einstein en su propuesta de la teoría de la relatividad, y por Heisenberg en su propuesta de la teoría cuántica, los conceptos que no corresponden a una observación concebible deberían de ser eliminados de la física. Para el ejemplo anterior, esto es posible sin que se presenten dificultades; basta con reemplazar afirmaciones como $x = \pi\ cm$ por esta: la probabilidad de distribución de los valores de x tiene su punto máximo en $x = \pi\ cm$; además (si se desea ser más preciso) se puede agregar: para cada medida, una respiración. En resumen, la mecánica ordinaria debe formularse estadísticamente. Born dedicó mucho tiempo para realizar esta aseveración y siempre estuvo seguro que era posible lograrlo sin dificultad alguna. Born fue todavía más allá al enfatizar que el determinismo de la física clásica puede llegar a ser aparentemente falso, cuando el proceso de investigación se apega demasiado a las estructuras conceptuales matemático – lógicas, pues se llegan a ver como ídolos y no como ideales, en la investigación de la naturaleza, y por ello no pueden ser utilizados contra lo esencialmente indeterminado: la interpretación estadística de la mecánica cuántica.

Mucho más dificultad conllevan las objeciones relacionadas con la realidad. Por ejemplo, el concepto de partícula. Un grano de arena contiene implícitamente la noción de que está en una posición definida y tiene un movimiento también definido. Pero de acuerdo con la mecánica cuántica es imposible determinar simultáneamente y con toda certeza su posición y su movimiento (más correctamente momentum), es decir, masa veces velocidad. Es así que surgen dos cuestiones: la primera ¿qué impide el medir ambas cantidades con una seguridad arbitraria por medio de experimentos a pesar de las aseveraciones teóricas? Segunda, si se ha evidenciado que no es confiable ¿se seguirá aun justificando el aplicar al electrón el concepto de partícula y las ideas asociadas con ella? Con respecto a estos planteamientos, es claro que si la teoría es correcta (existen suficientes pruebas para creerlo), el obstáculo para obtener una medición simultánea de la posición y el movimiento (y también otros pares similares llamados cantidades "conjugadas") debe basarse en las leyes de la mecánica cuántica en si. Este es el punto, aunque no sea del todo obvio. Niels Bohr dedicó mucho trabajo e ingenio para desarrollar una teoría de las mediciones que contribuyese a aclarar situaciones como esta, misma que presentó a Einstein para su consideración. Einstein también dedicó tiempo en el desarrollo de dispositivos de medición con los que se pudiese obtener resultados de las mediciones de la posición y movimiento, simultáneamente y con alto grado de exactitud. Para obtener mediciones de coordenadas espaciales

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

e instantes de tiempo rígido, se necesitan medidas estándares de longitud y relojes. Para medir los momenta y los arreglos energéticos usando móviles es necesario tomar en cuenta su desplazamiento y precisar el lugar de impacto del objeto a ser medido. Si se toma en cuenta el hecho de que la mecánica cuántica es apropiada para estudiar la interacción entre objetos físicos con dispositivos tecnológicos, se ha concluido que no existe vínculo alguno que pueda satisfacer la relación entre ambos al mismo tiempo. Es por ello que existen experimentos mutuamente exclusivos, pero a la vez complementarios entre sí, y que en combinación entre ellos mismos revelan todo lo que se puede aprender de un experimento en física. La idea de la complementariedad en física ha sido generalmente aceptada como la clave del pensamiento intuitivo de los procesos cuánticos. Bohr [27] transfirió esta idea de una forma muy ingeniosa a campos completamente distintos, por ejemplo, a la relación entre consciencia y cerebro, o al problema del libre albedrío y a otros problemas fundamentales de la filosofía. Para concluir, un último cuestionamiento: ¿Cómo se nombrarán los conceptos de posición y movimiento que no pueden asociarse de la forma tradicional como *cosa* (características) de una partícula? O de otra forma: ¿cuál es esa realidad que se puede describir con la teoría que ha sido propuesta? La respuesta a esta pregunta tiene un argumento filosófico, no físico y sobrepasa el propósito de este artículo escrito por Born quien, sin embargo, expuso sus puntos de vista [28]. La conclusión final del científico germano se refiere a su enfática retención de la idea de partícula, que naturalmente era necesario redefinir su significado. Para este propósito están disponibles conceptos bien desarrollos que son familiares en matemáticas bajo el nombre de invariantes con respecto a las transformaciones. Todo objeto que se percibe, aparece con innumerables características, así que el concepto de objeto es la invariante de todas estas características. Bajo este punto de vista, el actual y universalmente usado concepto de sistema en el que las partículas y las ondas ocurren al mismo tiempo, puede ser completamente justificado. A mediados de los 50 del siglo pasado las investigaciones relacionadas con núcleos y partículas elementales, habían dejado muchos límites con respecto al concepto de sistema, de acuerdo con Born, quien reconoce haber aprendido una gran lección proveniente de la historia, que nos ha contado, del origen de la mecánica cuántica, además auguraba que, presumiblemente el refinamiento de los métodos matemáticos no serían suficientes para producir una teoría satisfactoria, pero de alguna manera, en el medio científico, siempre al acecho, se propondrán conceptos no justificados por la experiencia, y que seguramente serán eliminados para así aclarar el camino por venir.

VII. La carta de Max Born a Albert Einstein.

Con relación al apartado 3 del presente artículo, existe una correspondencia que Born envió a Einstein [29] el miércoles 15 de julio de 1925 y que posteriormente detalló y amplió el propio Born (por razones de edición no reproduzco en su totalidad este interesante documento). Inicia contándole sobre el viaje de su esposa para Silvaplana, Engadine (Alemania) en compañía de sus hijos. Le hace saber que ha estado bastante atareado y trabajando con la ayuda de Ehrenfest y que ha leído el documento de Louis de Broglie. Considera que la teoría ondulatoria de la materia puede ser muy importante. Comenta sobre algunos errores en los cálculos realizados por Elsasser, pero con sus investigaciones relacionadas con la reflexión de los electrones va por buen camino. Sigue especulando con el trabajo de Louis de Broglie con relación a la explicación de la reflexión, la difracción y la interferencia, con base en la cuantización espacial que Compton y Duane propusieron y que han seguido tanto Epstein como Ehrenfest. Le hace saber sobre su principal interés en ese momento, que es el misterioso cálculo diferencial en el que se basa la teoría cuántica de la estructura atómica. Él y Jordan han estado ahondando en la literatura versada en sistemas multi-periódicos de átomos cuánticos. Publicarán pronto un artículo sobre el efecto de los campos no periódicos en los átomos, como un estudio preliminar sobre las colisiones atómicas, lo que le llevó a reflexionar sobre los diferentes comportamientos de los átomos que dependen principalmente de si presentan en promedio, momentos dipolo o cuadripolo o alta simetría eléctrica. Le hace saber sobre las objeciones que le envió a Jordan sobre su artículo y que él (Born) entenderá algún día, pero que, sin duda, tenía razón. Le reitera que sus jóvenes estudiantes Heisenberg, Jordan y Hund son bastante brillantes y que pronto se publicará un artículo de Heisenberg, con tintes místicos; Hund publicará algo relacionado con los sistemas periódicos y él mismo está trabajando en la teoría del entramado en los cristales y ha reflexionado cobre el equilibrio electrostático en ellos. Le solicita a Einstein su punto de vista sobre la unificación de la gravitación con la

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

electrodinámica, por lo que le solicita envíe su artículo al respecto para que él (Born) y Jordan realicen algunas variantes. Le comenta que ha recibido en el Instituto a muchos investigadores de varias partes del mundo y que han hecho buena amistad entre ellos y sus esposas. Como es verano, están de vacaciones y él no podrá tomarlas pues participará en la inauguración del nuevo Instituto para la hidrodinámica Prandtl que incluye una visita guiada, comida oficial y concierto de gala. Después, el 30 de julio, ofrecerá una conferencia en Tübingen, para después encontrarse con su familia en Engadine. En octubre asistirá a Cambridge y después al Congreso de Física en Moscú, para el invierno. Le comenta sobre las novedades astronómicas presentadas en el coloquio, donde Kienle reportó el hallazgo del satélite de Sirio, misteriosa estrella enana de gran masa (28,000 masas solares) y que de acuerdo con Eddington, es un conglomerado de núcleo desnudo y electrones, de color rojizo y que se ha determinado la exacta proporcionalidad de su enorme masa y su pequeño diámetro. Termina despidiéndose y enviando saludos.

Posteriormente el mismo Born amplía sus comentarios a esta carta, que para él es la más significativa e importante de todas. (Hago referencia sólo a lo concerniente con la propuesta de Heisenberg, por falta de espacio).

Tal como Born se lo comentó a Einstein, Heisenberg estaba por publicar un artículo con tintes místicos, mismo que se lo hizo llegar entre el 11 y el 12 de julio de 1925, solicitándole su opinión al respecto, pero no lo leyó en ese momento, pero sí recuerda haberlo leído antes de redactar la carta el 15 de julio. Le pareció un documento bien elaborado, a pesar de su apariencia mística, y que mostraba el maravilloso y extraordinario cálculo hecho por Heisenberg basado en matrices, y entonces se percató que la reformulación de su estudiante de la condición cuántica convencional está representada por los elementos de la diagonal de ecuación matricial, es decir:

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

Y por ello, los elementos sobrantes de la cantidad *pq – qp* deben tener valor igual a cero. Pero si este fuera el caso, él (Born) debía tener la precaución de no comentarlo con Einstein ya que la discrepancia de los valores de los elementos sobre la no diagonal debían demostrarse primero. Van der Waerden describe en su libro cómo fue que tuvieron éxito sobre esta expresión en particular y cómo lo reportaron Born, Heisenberg y Jordan en su artículo.

Uno de los primeros comentarios de Einstein a Born sobre el tema, está escrito en la carta que escribió Einstein el 4 de diciembre de 1926: Inicia comentando sobre un juego que propuso Born a Einstein y que disfrutó este último bastante al jugarlo. Incluye el comentario de la salud de su yerno al que también invita a participar en el juego una vez que recupere su salud. Y continúa Einstein: "La mecánica cuántica ciertamente se está imponiendo. Pero mi voz interna me dice que aún no es una cosa real. La teoría dice poco, pero además no nos deja algo que no sepamos. No es raro que yo siga convencido de que Él no juega a los dados. Las ondas, en un espacio de tres dimensiones cuya velocidad se regula a través de la energía potencial (por ejemplo en las bandas elásticas)… He estado trabajando bastante para lograr deducir las ecuaciones de movimiento de puntos materiales conocidos como singularidades y dados por ecuaciones diferenciales. Mis mejores deseos, tu migo A. Einstein".

VIII. Conclusiones.

Durante todos estos años (90, para ser exactos), el pensamiento de la física sigue arrojando nuevos resultados, que son y serán la base de nuevas ideas y descubrimientos. La lección es clara, no debemos encajonar nuestra imaginación ni vencernos durante el proceso de la investigación científica. La experimentación y el adecuado uso de las herramientas matemáticas son la clave del éxito en esta empresa, además de que su discurso es, ante todo, un método didáctico que sugiere cómo abordar el proceso de la enseñanza – aprendizaje de las ciencias exactas.

IX. Referencias.

[1] Born Max. *Physics in my generation*. Heidelberg Science Library. Longmans Springer- Verlag. United Kingdom. (1970).

[2] Born, Max. *Einstein's Theory of relativity*. Dover Editions. New York. 1962.

[3] Born, Max. *Statistical Interpretation of Quantum Mechanics*. Science Magazine Vol. 122 No. 3172. 14 October, 1955, pp. 675 – 679. United Kingdom. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

[4] Schrödinger, Erwin. *La Naturaleza y los Griegos*. Prólogo de Víctor Gómez Pin, premio Nobel de Física. Colección Metatemas No. 48. TusQuets editores. 2ª edición. Barcelona. Marzo 2006.

[5] Ladenburg, R. Z. Physik 4, 451 (1921); R. Ladenburg and F. Reiche, *Naturwiss*. 11, 584 (1923). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

[6] Kramers, A. H. Nature 113, 673 (1924). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[7] Heisenberg, W. Z. Physik 31, 681 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical In- terpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

[8] Born, Max., *ibid*. 26, 379 (1924); Born, Max and Jordan, P., ibid. 33, 479 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[9] Heisenberg, W., i*bid*. 33, 879 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[10] Martínez Tellez, A. *La extraña ecuación de Max Born*. Martes 11 de agosto de 2009. Recuperado el 8 de julio de 2015 de: http//la-mecanica-cuantica.blogspot.mx/2009/08/la-extrana-ecuacion-de-max-born.html

[11] Born, M., Jordan P. Z. Physic 34, 858 (1925).Citado en: Born, Max. Statistical In- terpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

[12] Born, M., Heisenberg W., Jordan, P., ibid. 35, 557 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

[13] Dirac, P. A. M. Proc. Royal Soc. (London) A109, 642 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[14] Pauli, W. Z. Physik 36, 336 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[15] Schrödinger, E. Ann. Physik (4), 79, 361, 489,734 (1926); 80, 437 (1926); 81, 109 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

[16] De Broglie, Louis. Thèses, Paris, 1924; Ann. Physik (10), 3, 22 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[17] Elsasser, W. Naturwiss. 13, 711 (1925). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[18] Davisson, C. J.; Germer, H. Phys. Rev. 30, 707 (1927). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

[19] Thomson, G. P. ; Reid, A. Nature 119, 890 (1927); Thomson, G. P. Proc. Royal Soc. (London) A117, 600 (1928). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[20] Schrödinger, E. Brit. Journal Phil. Sci. 3, 109, 233 (1952). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

[21] Born, M., Wiener, N. Z. Physik 36, 174 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[22] Born, M. *ibid* 37, 863 (1926); 38, 803 (1926); Gött. Nachr. Math.-Physik K1. 1, 146 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org

[23] Wentzel G. Z. Physik 40, 590 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[24] Heisenberg, W., *ibid*. 43, 172 (1927). Citado en: Born, Max. Statistical In- terpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de : www. sciencemag.org.

[25] Born, M., *ibid*. 40,167 (1926);Born, M. and Fock V., *ibid*. 51, 165 (1928). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[26] Dirac, P. A. M., Proc. Royal Soc. (London) A109 , 642 (1925); 110, 561 (1926); 111, 281 (1926); 112,

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

674 (1926). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[27] Bohr, N. Naturwiss. 16, 245 (1928); 17, 483 (1929); 21, 13 (1933); "Casuality and complementarity," Die Erkenntnis 6, 293 (1936). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de www. sciencemag.org.

[28] Born, M., Phil. Quart. 3, 134 (1953); Physik Bl. 10, 49 (1954). Citado en: Born, Max. Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Science Vol. 122, No. 3172, 14 de octubre de 1955. Recuperado el 10 de julio de 2015 de: www. sciencemag.org.

[29] Born, M. The Born – Einstein Letters 1916 – 1955. Friendship, politics and physics in uncertain times. Introduction by Werner Heisenberg. Foreword by Bertrand Russell. New preface by Diana Buschwald and Kip Thorne. Macmillan Editions. New York. 2005.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Cardinalidad y Ordinalidad. Su importancia en la Teoría de Números. Una aproximación con base en la Teoría de Conjuntos.

Francisco Guillermo Herrera Armendia[1], Marcos Fajardo Rendón[1], Marleny Hernández Escobar[1]
[1]Escuela Normal Superior de México, Departamento de Matemáticas. Cuerpo Académico "Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en la Formación Inicial y Educación Básica", Av. Manuel Salazar No. 201 Colonia Ex – Hacienda El Rosario, Ciudad de México.
harmendia@gmail.com

***Resumen*- Ofrecemos una interpretación sobre la importancia de los conceptos de Cardinal y Ordinal desde un punto de vista de la teoría de Conjuntos, como un reconocimiento a la labor didáctica que, en su momento, debieron sobrellevar los profesores que laboraron en educación matemática en sus diferentes niveles educativos.**

***Abstract*- This paper bring an interpretation of the the concepts of Cardinal and Ordinal relative to set theory remembering the teachers who worked in that years in mathematial education in different educational levels.**

***Palabras Clave*- historia, enseñanza, aprendizaje, cardinal, ordinal**

***Keywords*- history, teaching, learning, cardinal, ordinal.**

I. Introducción

En 1968, la Secretaría de Educación Pública (SEP) dio a conocer la propuesta de programas de Matemáticas que estuviesen actualizados y que respondiesen a las necesidades del mundo científico y tecnológico de la época, a través de la entonces Dirección General de Segunda Enseñanza [1]. El documento contiene el programa del primer curso de Matemáticas, indicando que los temas son los mismos a los de programas anteriores, pero en orden distinto con el propósito de lograr la unidad lógica necesaria para el aprendizaje correcto de los estudiantes de secundaria. Es así que en la primera Unidad se estudiasen los conceptos básicos elementales de los conjuntos (pertenencia, inclusión, conjuntos especiales, unión, intersección), la relación, el concepto de número natural pero ligado con los conjuntos equivalentes, asociando la correspondencia de elemento a elemento entre dos conjuntos. Además, se estudia el importante concepto de cardinalidad, para dar paso a adición de números naturales sustentada ya en la idea de Unión, Conjuntos Ajenos y Cardinalidad, para proseguir en este sentido con la multiplicación y después con las operaciones inversas a éstas: la sustracción y la división.

Posteriormente a aquellos años, y después de analizar la propuesta de la SEP, los equipos de profesores – investigadores de la Escuela Normal Superior de México (ENSM) y del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) publicaron los resultados de su trabajo en forma de libro de Texto de Matemáticas para primer grado de educación secundaria, que explicaba de forma más que detallada estas ideas, pero en el contexto de los entonces niños que iniciábamos el ciclo secundario [2].

Bien vale la pena analizar la propuesta de la SEP con el propósito de revalorar el trabajo realizado por los profesores de la ENSM y de la UNAM, además de reconocer el esfuerzo didáctico realizado que también dio frutos, pues muchos de los que ahora laboramos en la ENSM, estudiamos ese primer año de secundaria con el contenido propuesto por la SEP y el trabajo didáctico de los profesores – investigadores.

II. EL CARDINAL Y EL ORDINAL

El Número, en la actualidad, queda definido como el elemento de un conjunto que debe verificar propiedades específicas. En este sentido se han definido los conjuntos de los Números Naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los Reales $\mathbb{R}$, Los Complejos, $\mathbb{C}$, cuya construcción se verifica sucesivamente y a partir del conjunto $\mathbb{N}$ [3].

Asociado a esta idea, la relación de los elementos de estos conjuntos de va fundamentando con la inclusión de: a) cardinal, b) numeral c) ordinal.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Para el caso de (a), se tiene la noción de número de elementos de un conjunto finito:
$x_0^n \in A, tal\ que\ A\ \{x_0, x_2, \dots x_n\}$
(1)
Dado este conjunto *A*, se denomina su cardinal al más pequeño ordinal equipotente a *A*. En este sentido un cardinal es un ordinal particular.
Entonces, los conjuntos:

$$\omega, \omega + 3, \omega + \omega$$

son equipotentes a $\mathbb{N}$. Al observar la relación de desigualdad:

$$\omega < \omega + 3 < \omega + \omega \ ;$$

se infiere que el más pequeño de los ordinales equipotentes a $\mathbb{N}$ es ω , es decir, que este elemento es el cardinal de $\mathbb{N}$. Por convenio, (1) se reescribe:

$$\aleph_0^n \in A, tal\ que\ A\ \{\aleph_0, \aleph_1, \dots \aleph_n \quad (2)$$

que incluye intuitivamente la anotación del primer cardinal no numerable.

$$\forall\ \aleph_\alpha\ \exists\ \aleph_{\alpha+1} \quad (3)$$

es decir, que para todo ordinal α, existe el primer cardinal estrictamente superior a él.

$$\forall \aleph_\alpha\ Card(\aleph_{\alpha+1}) \quad (4)$$

También podemos inferir que dos conjuntos tienen igual cardinal si, y solamente si son equipotentes. Es por ello que los cardinales finitos son los enteros naturales y el cardinal de un conjunto finito es el número de sus elementos. El conjunto N esta constituido por los cardinales finitos, pero no existe conjunto alguno en el que todos los cardinales sean sus elementos:

$$A = \{\aleph_0, \aleph_{\alpha+1}, \dots \aleph_\infty\} = \{\varnothing\} \quad (5)$$

En este sentido, surge la aritmética de los cardinales infinitos, también llamados transfinitos. En general, la regla de composición aditiva se aplica:

$$Card(M) + Card(N) = Card(M \cup N) \quad (6),$$

Donde *M* y *N* son conjuntos disjuntos.

$$Card(A) + Card(B) = Card(A \cup B) + Card(A \cap B) \quad (7)$$

Cuando *A*, *B* son dos conjuntos cualesquiera.

En otro sentido, la ordinalidad se aplica a la ampliación de la noción de número asociada al orden o el rango de un elemento *x* de un conjunto cualquiera *A* bien ordenado, tal es el caso de los sistemas de numeración de base *b*. En él, el primer orden entero corresponde a las unidades b^0, el segundo orden corresponde a colección de elementos de que está formada la base *b*, es decir b^1, y así sucesivamente, de manera que al asociarse multiplicativamente cada potencia ordenada al dígito de la base *b*, se escribe el número de elementos que forman la cantidad en términos de la unidad. Así, para cualquier base *b*, la ordinalidad se representa:

$$b^n, b^{n-1}, b^{n-2}, \dots, b^1, b^0; n \in \mathbb{Z}^+ \quad (8)$$

y en ese mismo orden quedan representados también los *n-cimales* de la base *b*:

$$b^{-1}, b^{-2}, \dots, b^{n+2}, b^{n+1}, b^n\ ; n\epsilon\ \mathbb{Z}^- \quad (9)$$

En general:

Sea el conjunto $E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, se puede observar que existe un orden y que todo elemento de *E* es también parte de él. Son dos propiedades notables.

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in E\ \wedge \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset E\ pues\ \emptyset\ \in E\ \wedge \{\emptyset\} \in E \quad (10)$$

Por lo anterior, ordinal es todo conjunto α que conserva las propiedades notables antes mencionadas: la pertenencia en orden en α y todo elemento de α, es una parte de él mismo, por lo que es un conjunto transitivo. No existe un conjunto cuyos elementos sean todos los ordinales.

Cuando existe más de un ordinal, tenemos:
$Sean\ \alpha, \beta$ dos ordinales cualquiera.

$$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta \quad (11)$$

Que denota el orden entre dos (o más) cardinales. Si existe desigualdad entre ellos, tenemos que:

$$\alpha \neq \beta\ \rightarrow \alpha \in \beta \wedge\ \beta \in \alpha \quad (12).$$

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Para el caso de un orden consecutivo, tenemos: $\forall\, \alpha, \alpha \cup \{\alpha\}$, representa el ordinal estrictamente más pequeño superior a α. Es decir, es el sucesor de α, denotado por $\alpha + 1$ [4] [5].

Definición 1. Para cada conjunto bien ordenado *E*, existe un isomorfismo, único, de conjuntos ordenados de *E* sobre un ordinal que entonces se denomina ordinal de *E*. [3].

Definición 2.
$Sea\ \omega = [0, 1, 2, 3, \dots\}\ el\ ordinal\ de\ \mathbb{N}$. Al aplicar las reglas de composición definidas por la asociatividad aditiva y multiplicativa, tenemos:

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$$
$$\omega + 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\}$$
$$2\omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$$
$$2\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega\}$$
$$\omega^2 = \omega \cup 2\omega \cup 3\omega \cup \dots$$

Proposición 1. $Sea\ Card\omega = Card(\omega + n) = Card(n\omega) = Card(\omega^n) = \aleph_0$, todos distintos entre sí, pero con el mismo cardinal $\aleph_0$ [3].
Observamos que su conjunto es infinito no numerable pero su cardinal es aquel más pequeño $\aleph_1$, estrictamente superior a $\aleph_0$.

III. El trabajo de Gyles Brandreth.

Gyles Brandreth en su obra sobre divulgación y curiosidades matemáticas propone lo siguiente [6]:

123 456 789 + 987 654 321 + 123 456 789 + 987 654 321 + 2

Al asociar aditivamente, la suma corresponde a un numeral formado únicamente con el dígito 2 que representa una cantidad hasta el orden de las unidades de millares de millón (10^9) , por tratarse de base diez b_{10}.
El autor citado propone cuatro sumandos formados por la secuencia de los Números Naturales N_{seq}, considerados como una secuencia [7, pág. 1]. Es importante retomar la obra de Peano, quien en el apartado titulado "Arithmetices Principia", apartado 1, "De numeris et de additione", y en el sub apartado "Explicationes", define al signo $\mathbb{N}$ con el significado de número, específicamente número entero positivo, de tal manera que el número *1*, significa la unidad. Además, *a+1* significa la secuencia en términos de *a*, al agregar la unidad. En este sentido, la interpretación de la propuesta de Brandreth consiste en escribir la secuencia de los números naturales iniciando por la unidad y sus siguientes, hasta el último dígito permitido para la base diez b_{10} . Al proponer que se aplique la regla de composición asociativa aditiva, necesariamente se obtiene una decena, es decir, ya se requiere escribir la cantidad utilizando el *0*, que al pertenecer a los Números Naturales N, ahora adquiere ese conjunto la característica de clase, tal como lo propone Peano [7, pág. X], en el apartado "Logicae Notationes", en el sub apartado IV, "De classibus". En él, Peano define: "El signo K significa Clase y se relaciona con la adición".

Entonces, al interpretar el cuestionamiento sobre si el cero *(0)* es o no un Número Natural N, la respuesta con base en las anotaciones de Peano, corresponde a: Si estamos hablando de una secuencia, entonces el primer elemento de los números Naturales es 1 [8, pág. 3]. Si hablamos de una clase, entonces el primer elemento de los números Naturales es *0*, pues ya ha habido una aplicación de la regla de composición, concretamente la propiedad asociativa de la adición.

Si probamos ahora con tres b_3 (pues la base dos b_2 queda descartada por utilizar solamente los dígitos *0,1*, y la propuesta se basa en el conjunto $\mathbb{N}_{seq}$ en la que el dígito cero *(0)* no está incluido), tenemos:

12 + 21 + 12 + 21 + 2 = 222 b_3

Generalizando [9, p.p. 37 – 42]:

Sea el dígito *d* y la base *b*:

$$(db^n + db^{n-1} + db^{n-2} + \dots + db^2 + db^1 + db^0) + (db^n + db^{n-1} + db^{n-2} + \dots + db^2 + db^1 + db^0) + (db^n + db^{n-1} + db^{n-2} + \dots + db^2 + db^1 + db^0) + (db^n + db^{n-1} + db^{n-2} + \dots + db^2 + db^1 + db^0) + 2 = 22 \dots..2, \quad \text{donde: } n \in \mathbb{Z}^+ \qquad (13)$$

IV. Conclusiones

El dígito *dos* en toda la clase de órdenes se explica porque es el factor de la asociatividad aditiva secuenciada para el primer sumando ascendentemente y para el segundo,

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

descendentemente, y al realizarse dos veces esta composición y agregarle el dígito *dos*, se obtiene la suma en la que todos los dígitos del numeral son dígitos *dos*. Si la composición asociativa – aditiva se realiza *3* veces y se agrega *3* unidades, entonces se obtendrá el numeral compuesto únicamente con dígitos *tres*, así que para *n* veces la composición aditiva agregado de *n* unidades, se obtendrá el numeral con dígitos *n*. [10 p.p. 15 - 17].

Con base en el análisis anterior, podemos concluir de la siguiente manera [11, p.p. 11 - 15], [12, p.p. 88 – 110]

Definición 1.

$$\mathbb{N}_{Seq} \supset x, tal\ que\ x\ son\ números\ dígitos\ de\ base\ b. \quad (14)$$

Definición 2.

$$Sea\ b_m\ la\ base\ de\ un\ sistema\ de\ numeración\ de\ m\ dígitos. \quad (15)$$

Definición 3.

$$Sea\ b_{m,a} \supset dígitos \in \mathbb{N}_{Seq}\ , ordenados\ crecientemente. \quad (16)$$

Definición 4.

$$Sea\ b_{m,d} \supset dígitos \in \mathbb{N}_{Seq}\ , ordenados\ decrecientemente \quad (17)$$

Lema:

$$Sea\ b_m \supset \mathbb{N}_{Seq}. Entonces\ m\left(b_{m,a} + b_{m,d}\right) + n = n, tal\ que\ \exists n\ en\ todos\ los\ órdenes\ y\ clases\ de\ b_m.$$

$$Además\ b_m > 2. \quad (18)$$

REFERENCIAS

[1] Secretaría de Educación Pública. Dirección General de Segunda Enseñanza. Subdirección Administrativa de Escuelas Secundarias Diurnas en el Distrito Federal. *Boletín de Matemáticas*. (1968). México.

[2] Cárdenas, Humberto; Miguel A. R. Curiel Ariza; López Pineda, Humberto; Lluis Riera, Emilio; Peralta Corona, Fidel; Tavera Guerrero, Cuauhtémoc; Villar Quijano, Elías. *Matemáticas. Primer Curso*. C.E.C.S.A. Sexta Reimpresión. Sábado 15 de Julio de 1972. México.

[3] Bouvier, Alan; George Michel. *Diccionario de Matemáticas*. Dirigido por Francois Le Lionnais. Ediciones Akal. (1984). Madrid.

[4] Doneddu, A. *Curso de Matemáticas. Tomo I. Álgebra y Geometría*. Editorial Aguilar. Colección Ciencia y Técnica. (1978). Madrid.

[5] De Bary, Cristiane; Boirel, René; Buisson, Piierre; Fèvre, Danielle; Gautier, Nicle; Glaymann, Maurice; Pascal, Michelle; Russo, Francois; Warusdel, André. *Diccionarios del Saber Moderno. Las Matemáticas*. (1978). Madrid.

[6] Brandreth, Gyles. *Juegos con Números*. Editorial GEDISA. (1990). México.

[7] Peano, Ioseph. *Arithmetices Principia. Nova Methodo Exposita*. Ediderunt Fratres Bocca. (1889). Roma.

[8] Van der Waerden, B. L. *Algebra. Vol. 1*. Frederick Ungar Publishing Company. (1970). New York.

[9] Dedekind, Richard. *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Ediciones Universidad Autónoma de Madrid. Alizanza Editorial. Madrid. (2014).

[10] Hardy, G. H. A *Course of Pure Mathematics*. Cambridge University Press. (1928). Cambridge, U. K.

[11] Bibiographisches institut. *Der GroBe RechenDuden. Aufgabensammlung*. Band III. Dudenverlag. (1966). Mannheim.

[12] Kuratowski, K; Motowski, A. (Members of the Polish Academy of Sciences*). Set Theory*. PWN Polish Scientific Publishers. Warszawa. North – Holland Pblishing , Amsterdam (1968).

CAPÍTULO 2

"PERSPECTIVAS SOCIALES, ANTROPOLÓGICAS Y COGNITIVAS DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS"

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La cultura matemática como detonante de una enseñanza y aprendizaje agradable en el aula

Erick Solís Hernández[1]
[1]Subdirector de gestión escolar.
[1]Secundaria Diurna No. 311 Francisco Larroyo, Iztapalapa CDMX.
[1]Dirección General de Servicios Educativos en Iztapalapa, CDMX.
zacsaasil@gmail.com

"La información alimenta el saber, mientras que el conocimiento favorece el hacer, por tanto la información empodera y el conocimiento transforma"

Félix Hompanera Velázquez

***Resumen*- En el nivel de educación básica un docente en la asignatura de matemáticas puede fortalecer sus estrategias en su quehacer educativo al enriquecer su cultura matemática a través de la historiografía, lo que detonará en un diseño de situaciones didácticas que permitan una enseñanza y aprendizaje agradable de la matemática en el ambiente áulico.**

***Palabras Clave*- cultura, disciplina, historiografía, situación didáctica**

***Abstract*- At the level of basic education a teacher in the mathematics can strengthen their strategies in their educational work to enrich their mathematical culture through historiography , which detonate in a design of teaching situations that allow teaching and enjoyable learning mathematics in the courtly environment.**

***Keywords*- culture, discipline, historiography, teaching situation introducción.**

I. Introducción

La semblanza de la asignatura de matemáticas en educación básica contiene bastantes puntos de discusión históricamente; desde el punto de vista curricular como con sus métodos de enseñanza. Podremos encontrar por ejemplo que la enseñanza de las matemáticas han pasado por tres momentos fundamentales [1] uno es cuando en el siglo pasado se da la publicación al primer plan de estudios de secundaria en 1926, otro en 1974 donde se esforzaron en las técnicas para el aprendizaje a través de la repetición mecánica de diversos ejercicios, se introduce la teoría de conjuntos y se le da demasiada formalización para abordar los temas y el tercer período se da a partir de los planes de 1993 donde se hace énfasis a la propuesta de resolución de problemas.

Estos cambios no han tenido una congruencia con la formación de docentes en la E.N.S.M. sobre todo con el último periodo mencionado, pues un egresado de la licenciatura de matemáticas estudiaba con un plan de estudios diferente al que se trabajaba en la secundaria cuando egresaba.

Aunque no debió ser una limitante, la realidad era muy distinta. Parece muy interesante que debido a estos detalles curriculares, irremediablemente obligaban al docente buscar profesionalizarse al respecto (en el mejor de los casos) y en caso contrario irse adaptando a las necesidades del sistema mientras se lo permitiera a través de cursos de profesionalización como el PRONAP [1], carrera magisterial [2], cursos escalafonarios o en los Centros de Maestros [2].

Pero hay que aclarar que una cosa era sobrevivir para el sistema y otra muy diferente profesionalizarse para mejorar las enseñanzas y aprendizajes de las matemáticas, dejando a un lado la cultura matemática, debido a que esas necesidades de sobrevivencia curricular le exigen al docente y lo obligan a jerarquizar ciertas prioridades como ENLACE[3], PISA[4], EXAN-I[5], PLANEA[6], etc.

El propósito de este artículo es motivar al lector para que reflexione sobre su propia historia, sea académica o personal, sus anécdotas, sus motivaciones; su cultura matemática.

II. La cultura Matemática y el Docente

Es importante mencionar que al hablar de una cultura matemática existen diversos autores que la mencionan (Bishop, Noss, Geertz, entre otros) para este trabajo se considerará como un posible referente lo propuesto por Bishop [3], este autor dice que no basta simplemente enseñar matemáticas, se debe educar acerca de las matemáticas mediante y con las matemáticas. A este respecto el creador de la teoría de las situaciones didácticas Guy Brousseau [4] menciona que no sólo es necesario saber matemáticas, sino hay que saber cómo enseñarlas.

El neuropsicólogo Howard Gardner [5] autor de la teoría de las inteligencias múltiples menciona que aunque los humanos son criaturas del cerebro, se es participe de una cultura, la cual evoluciona haciendo que seamos criaturas de nuestra cultura. Pero cuando se trata de los temas de la mente y el uso de diversas inteligencias Gardner hace énfasis que un profesor con una comprensión profunda de un tema o método puede pensarlo de diversas maneras y además no se puede afirmar que domine su disciplina si no tiene una agilidad conceptual.

La Real Academia Española define la cultura como el conjunto de modos de vida y costumbres, conocimientos y grado de desarrollo artístico, científico, industrial, en una época, grupo social. Es decir, si vamos entrelazando lo que

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

los autores comentan sobre la cultura, ésta actúa como un medio para que las mentes puedan intercambiar o interaccionar entre sí, es decir, comunicarse o compartir ideas.

Podemos entonces hablar de una cultura matemática, con base en lo planteado por Brousseasu, Gardner y Bishop. Si a lo anterior le agregamos algunas experiencias educativas como docente frente a grupo, asesor técnico pedagógico o directivo se puede complementar que un profesor de educación básica al utilizar la historiografía[7] de la matemática para enriquecer la cultura matemática que trae de bagaje desde su etapa de estudiante hasta su actividad educativa logra utilizarla de manera más estratégica en el aula con el alumnado.
¿Cómo se accede entonces a una cultura matemática? Pareciera que bastaría solo con leer y conocer cómo ha ido evolucionando la historiografía de la matemática, invitar o motivar a los alumnos a que lean diversas anécdotas o biografías de diversos matemáticos, pero no se trata sólo de una receta de actividades a realizar por parte del docente; se debe ir más allá.

En la historiografía de la matemática existen infinidad de pretextos para ir enriqueciendo las diversas estrategias de enseñanza y aprendizaje en un salón de clases. Si el docente de matemáticas utiliza el acrecentar su cultura cómo una forma de mejorar sus estrategias de enseñanza y aprendizaje el resultado puede ser muy enriquecedora, pues el diseño de las situaciones didácticas así como su enlace con otras situaciones cuando el docente las elabora de manera consciente; el ambiente de aprendizaje es muy atractivo para el alumnado.

Al respecto de la historiografía de la matemática, Francisca Ortiz [5] menciona la importancia del uso de la matemática recreativa, la cual se nutre de una gran variedad de problemas que a través de la historia han logrado obtener un cierto interés, pero hay que aclarar en no confundir el hecho de utilizar la historiografía matemática con el uso de la matemática recreativa, ambas se deberían fortalecer, pero la primera es fundamental cuando se habla de una cultura matemática, la segunda es una estrategia en el aula de la primera.

Cuando se menciona una cultura matemática en un docente, no se trata solamente en el dominio de un conocimiento acerca de la historiografía de la matemática y de la posibilidad de trasmitir hechos, anécdotas o fechas, sino de una mirada diferente donde el docente a través de esa cultura matemática le concede la importancia a esos cúmulos de conocimientos, los domina y los pone en práctica diseñando las situaciones didácticas pertinentes que logren una enseñanza y aprendizaje agradable en el aula.

Es por esa razón que un docente que tiene una cultura matemática (sabe dónde, cómo y cuándo utilizar sus saberes matemáticos) y va más allá con el alumnado con el que comparte ese gusto por la matemática, pues hace consiente que debe incidir y motivar para que el ellos se apropien de los conocimientos y saberes matemáticos de forma diferente a la tradicional, es decir de forma agradable y fundamentado.

Cuando un docente muestra que tiene una cultura matemática, se ve notoriamente reflejado en el diseño de las situaciones didácticas, pues nunca partirá de cero, ya que al tener un amplio saber matemático, tendrá una cierta autonomía académica que le permita afrontar esa rudeza que se tiene entre la teoría, la práctica y la aplicación de la resolución de problemas con la matemática en el salón de clases [11].

Al parecer un docente con una amplia cultura matemática es quien en una situación didáctica sabe lo que tiene que diseñar, hacer y sobre todo cómo hacerlo de la mejor manera posible.
¿Entonces es exclusivamente con las matemáticas?
Parecería que no debería ser exclusivamente, pues las matemáticas están entrelazadas con infinidad de asignaturas académicas, se puede tomar como pretexto alguna de las asignaturas de la educación básica y diseñar una situación didáctica.

El problema muchas veces es la falta de interés por entrelazarla (entre menos tome en cuenta otras asignaturas, supondría que es mejor para el docente) pues no hay obligación por investigar más sobre el tema. Es en esto último es donde entra una cultura general que debiéramos tener los que estamos inmersos en un ámbito educativo, porque nos permitiría tener más herramientas didácticas para hacer atractiva la clase de matemáticas.

Hay diversas propuestas para hacer más entendible la matemática, libros que hablan en específico de un determinado tema, investigaciones que demuestran determinada metodología aplicable en el aula, con sólo goglear[8] "didáctica de la matemática", "matemáticas fáciles" o "métodos sencillos para aprender matemáticas", la web nos proporciona desde videos hasta algunas aplicaciones para ser utilizadas en un dispositivo móvil.

Pero el punto es la necesidad del docente para utilizarlo en la clase de matemáticas, Lorenzo Sánchez Alavés [8] comenta que una cultura matemática depende de varios factores como el contexto social o el escolar en el que se desarrolló inicialmente como estudiante, agrega que el contexto social le suministra a los individuos las herramientas que le permiten modelar su pensamiento a través de artefactos cognitivos.

En los artefactos que la misma cultura le suministra al individuo están las herramientas matemáticas, pero no hay que olvidar que al interactuar con ellos, el mismo individuo los renueva, los rehace y hasta los reinventa de su propósito original.

Howard Gardner [7] considera 5 diferentes mentes que abarcan el espectro cognitivo y que por razones diversas en las personas difieren una de otra en sus respectivos perfiles de inteligencia. Una de ellas es la mente disciplinada, la cual le permite a la persona saberse a sí mismo cómo trabajar y de manera constante para mejorar habilidades y comprensión.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Con respecto a la mente disciplinada resulta interesante enlazarla con un docente que aprovecha su cultura matemática, pues no todo el conocimiento viene del pasado, lo que le permite construirlo de un modo que le sea significativo y aplicable en su quehacer cotidiano.

Cuando un profesor tiene unos buenos cimientos y bagaje en su cultura matemática poco a poco la información que va recabando a través de diferentes medios o situaciones contextuales que le permite considerar toda esa información que recaba no como un fin o como tarima para presumir ante sus alumnos, sino como un medio para el diseño de mejores situaciones didácticas, que irremediablemente se ve reflejado en una enseñanza y aprendizaje agradable de la matemática.

¿Por qué agradable? Una situación didáctica[9] que es diseñada desde diferentes estrategias, hace que las actividades planteadas para el tema por abordar tengan muchas oportunidades para que los alumnos puedan ponerlo en práctica sobre todo en lo que ellos han comprendido en una diversidad de condiciones y opciones para compartirlo.

Cuando se diseña una situación didáctica pensando en que el alumnado pueda compartir lo que más le ha gustado de las actividades, de los temas abordados de la misma clase, se llega a la posibilidad de evaluar una comprensión del alumnado, pues resulta un reto nuevo y no queda en una repetición sobre planteamientos en los que ya están familiarizados.

Una enseñanza y aprendizaje agradable se da cuando el docente diseña y crea las condiciones mínimas necesarias para que en el ambiente de aprendizaje permita al alumnado disfrutar de ese momento de tal manera que aunque se trabaje con resolución de problemas, el alumnado no se estrese ni se retraiga por dar sus soluciones, aunque parezcan que son extrañas o inentendibles. Porque finalmente el profesor crea un ambiente donde ese tipo de respuestas correctas, incorrectas, extrañas o inentendibles le señalan una cosa importantísima: que el alumnado lo está haciendo con agrado sin un estrés ocasionado por una simple calificación o sello que sólo demuestra que se hacen las cosas por obtener una aceptación por parte del profesor y no por el gusto de compartir sus extraños descubrimientos [10].

En un ambiente de aprendizaje que permita una enseñanza y aprendizaje agradable de la matemática[10], nadie sabe más, nadie da una única respuesta, nadie tiene todo el conocimiento, todos tienen las mismas oportunidades de encontrar la solución, de equivocarse, pero lo más importante es que en un ambiente así, el compromiso es compartir y apoyar a sus iguales, aun cuando exista un posible error.

Suena un poco difícil encontrar un diseño de una situación didáctica que permita lo anterior y un tanto más complicado crear un ambiente como el que se describe. Pero la realidad es que si se puede lograr a través de una cultura matemática que fomenta un crecimiento y no una simple transmisión de fechas y hechos ocurridos por personajes matemáticos, aun cuando sean interesantes o importantes para el desarrollo de la matemática.
Cuando un docente comprende que su historia académica, sus experiencias a lo largo de su actividad como docente son útiles y si además poco apoco va identificando los temas o conceptos matemáticos que en realidad son importantes [13], con apoyo de la historiografía diseña y aborda el tema en cuestión desde diferentes perspectivas (interdisciplinariedad) es precisamente donde la cultura matemática resulta ser el detonador para un ambiente diferente.

III. Algunos ejemplos de cómo la cultura matemática ha servido como detonante de una enseñanza y aprendizaje agradable

Alfonso Torres menciona [12] que el conocimiento práctico no es el objetivo de la investigación acción, sino el comienzo, no es sólo investigar, sino una forma de entender la enseñanza. Así el objetivo principal de este artículo no es tratar de justificar esta reflexión de una experiencia educativa a través de alguna metodología de investigación (cualitativa o cuantitativa).

Pero dicha practicidad ha permitido trabajar lo antes señalado de varias y diversas formas, desde esa institucionalidad o burocracia educativa que solicita más de tres copias y otros tantos para realizar alguna actividad hasta espacios donde no importa ir al cerro más alejado de la Ciudad de México en dónde el principal objetivo es compartir algunas propuestas para hacer más divertida y agradable la enseñanza de la matemática con el alumnado o en un congreso donde el profesor busca alternativas para llevarlas al salón de clases o hasta disfrazarse para un auditorio de alumnos de quinto semestre de la Escuela Normal Superior de México, todo lo anterior ha permitido ir recabando la información desde la óptica y opiniones de alumnos de educación básica, docentes, directivos y alumnos en proceso de formación de alguna escuela normal.

Cuando se habla de un detonante, no es mostrar una fecha o simplemente el hecho historiográfico [13] o el uso de algún algoritmo, sino va más allá, como una estrategia de enganche cognitivo que va permitiendo al alumnado ir siendo parte del show y no sólo un mero espectador. Es muy interesante compartir el agrado con el que se trabaja bajo esta perspectiva en forma de una sesión de clases de 50 minutos, un taller de 2 horas o una simple charla de matemáticas, pero sobre todo como se desenvuelve la situación didáctica que en sus diferentes momentos (acción, validación, formulación e institucionalización) va permitiendo al docente ir adaptando y flexibilizando el nivel de complejidad del tema matemático.

Una de las estrategias que se han implementado para lograr que la cultura matemática sea un detonante, ha sido el conjuntar algunas inquietudes, loqueras y en mi caso muy particular "algún desorden matemático" con profesores, maestros y doctores en matemática educativa que sienten un compromiso por hacer de la matemática algo entendible y aplicable.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Se hacen llamar los cinco fantásticos[11] y tienen la misión de mostrar caminos democráticos para acceder al conocimiento a través de diversas actividades que permita y lleve a fortalecer formas de pensamiento matemático con el propósito de acercarlo a lo hermoso que es la ciencia. Aunque no tienen como propósito principal enriquecer la cultura matemática, estos cinco personajes lo hacen de manera implícita, cada uno con un estilo propio, divertido, enigmático y creativo.
Cada uno de ellos es una muestra de tener una mente disciplinada[12], no sólo saben de matemática, sino saben cuál estrategia conviene más utilizar dependiendo del público y complejidad del tema. Es decir, con ellos la cultura matemática que traen de bagaje a través de su experiencia les sirve como detonante para hacer más agradable la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Existen otros casos en donde se ha utilizado el uso de la historiografía de la matemática con apoyo de la matemática recreativa y se mencionaran dos que han permitido hacer muy atractiva y agradable la enseñanza de la matemática. Uno es respecto a los materiales didácticos utilizados en la antigüedad y otro es las propiedades del triángulo de Pascal.

En el primer caso se ha ido diversificando las propuestas de algunos materiales didácticos utilizados en la antigüedad como las regletas, barras o huesos de Napier [14], se puede considerar como un método muy ingenioso para multiplicar obteniendo los resultados de forma rápida y sencilla.

Lo interesante de este caso es que no sólo se trata de utilizarlo como una anécdota, sino que se va enganchando al alumnado con la historiografía de los diferentes métodos de multiplicación que han utilizado diferentes civilizaciones (como la egipcia que no era un sistema posicional), el uso del ábaco en la cultura romana o el método de la celosía (enrejado) por mencionar algunos ejemplos y se muestra que se puede re-aprender a multiplicar de otra manera, si bien es cierto que no es algo nuevo, si ha resultado interesante, agradable y ha permitido al alumnado observar que se puede hacer algo cotidiano que le solicitan en la escuela relacionado con un tema matemático de una forma diferente a la tradicional.

En el segundo caso se utiliza las propiedades del triángulo de Pascal siendo muy atractivo tanto para docentes como para el alumnado desde la forma en cómo se va armando (por decirlo de una manera un poco coloquial) pero más interesante cuando se observan y se utilizan sus propiedades, por ejemplo el palo de jockey, las serie de números triangulares, las probabilidades de un lanzamiento de dos o tres monedas y el triángulo de Siernspinsky.

Ahora como una forma de entrelazar el bagaje matemático, experiencias didácticas y haciendo uso como detonante de la cultura matemática en casos concretos, se compartirá de forma muy breve dos casos en particular que han servido y han sido muy significativos y bastante interesante, uno ha sido la escuela pitagórica con el uso de la música y la matemática [15], enlazándolo en forma de una muestra didáctica de cómo un Disc Jockey mezcla la música electrónica en cualquier concierto musical y otra ha sido el uso de trazos básicos de geometría para entender el diseño de la fachada de una iglesia que fue construida en el período barroco.

En el primer caso se reúne un bagaje musicomatemático y se aprovecha el uso de las inteligencias múltiples[13] propuesto por Howard Gardner, donde el pretexto es la escala musical propuesta por la escuela Pitagórica y se va describiendo a través de simples fracciones la frecuencia de cada nota musical hasta llegar a un modelo binario de la música que es utilizado por la música en general pero que se nota más específico con la música electrónica y su aplicación en la vida diaria con apoyo de un software musical que permite mezclar la música y mostrar las aplicaciones de diverso conceptos matemáticos. En algunos casos se ha podido llegar a describir la propuesta metodológica de Julián Carrillo para aprender música con apoyo de la matemática, en específico aprovechando los primeros 12 números naturales para reconocer las notas musicales y su modelo matemático del sonido trece[14].

En el segundo caso ha demostrado mucho interés por parte del alumnado, pues independientemente de la religión que uno profese, cuando se muestra que a través de unos pocos conocimientos básicos de geometría se puede diseñar una situación didáctica muy interesante y sobre todo muy interdisciplinaria. Dicha actividad trata de diseñar una fachada de alguna iglesia que haya sido construida en el período Barroco, utilizando regla y compás, unos triángulos isósceles, unas diagonales y un hexágono, permitiendo demostrar que la arquitectura de una iglesia tiene un trazo armonioso.

Lo interesante de esta estrategia es que se puede hacer una buena guía de observación que se apoye con las asignaturas de historia y geografía, pues las iglesias del período barroco cuentan con un pequeño símbolo escondido en su arquitectura, el cual se le denomina signo de María, el cual resulta ser un anagrama (Inmaculada María Auxiliadora Reina) y un diseño geométrico muy armonioso, el cual si uno es buen observador la termina encontrando donde menos se encuentra dentro o afuera de la iglesia

Esta idea de situación didáctica nació del interés que surgió a raíz de una conferencia en la que un servidor estuvo presente como estudiante de la especialidad de matemáticas en la Escuela Normal Superior de México impartida por el Arquitecto Franklin Fernández Escamilla, denominada "Los trazos originales del barroco, armonía en los edificios religiosos del siglo XVIII", lo curioso es que iba dirigida hacia la especialidad de historia y no hubo quien se interesara en asistir, así que la profesora Didya Alicia Flores Rico nos llevó para no hacer sentir mal al ponente y de ahí nació la idea de utilizar su investigación como un detonante para hacer más interesante y agradable una clase de matemáticas relacionada con la geometría y que posteriormente al irse afinando llego a ser una muestra didáctica para apoyar alumnos Sordos en el nivel de secundaria para que pudieran entender los trazos básicos geométricos, su aplicación, su uso en algo que ellos pudieran observar y les fuera significativo.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Así, el bagaje matemático, el interés personal por conocer una historiografía de la matemática, la motivación, la cultura matemática ha podido ser utilizada como una estrategia para diseñar una situación didáctica que permite una enseñanza y aprendizaje agradable.

IV. Conclusiones

Hablar de la posibilidad de que un profesor de matemáticas diversifique sus estrategias de enseñanza y aprendizaje, comienzan los problemas, no sólo de metodología o de didáctica, sino de pertinencia. Cuando contamos con una cultura matemática, la cual no es utilizada como peldaño para presumir cantidad de libros leídos, ponencias, talleres o publicaciones en nuestro haber, sino para poder contar con mejores estrategias para un diseño de situaciones didácticas, ocurre algo inesperado; llegamos a usar de manera implícita una agilidad mental.

Cuando esa agilidad nos permite utilizar y aprovechar la interdisciplinariedad, cuesta mucho trabajo aterrizarlo en un nivel básico de la educación, pues nos ubica en nuestra limitante como profesionista, nos ocasiona discordia, ¿por qué? Porque en la interdisciplinariedad dejamos la individualidad, compartimos, nos van a observar, nos van a cuestionar en nuestro quehacer, lo cual probablemente nos causara molestia ¿Por qué tendrán que cuestionar mi forma de enseñar? ¿Por qué se tendría que cuestionar mi experiencia? ¿Por qué presentar algo a lo que no estoy acostumbrado?

Pero si se entiende que esa interdisciplinariedad viene sustentada en nuestra cultura matemática, resulta todo un deleite compartir el conocimiento matemático.

Carl Sagan [16] hace una reflexión muy interesante acerca de su interés por la ciencia, tanto critica como agradece a sus profesores, pero termina reconociendo que gracias a ellos y a sus padres logra llegar a ser el gran científico que fue.

Así, se considera que un profesor que realmente va enriqueciendo su cultura matemática, aprovechando su bagaje matemático que trae desde que es estudiante y si agregamos su motivación por mejorar la enseñanza y aprendizaje, podremos afirmar que la cultura matemática es un detonante para hacer diseñar una situación didáctica de una manera sencilla, entendible, fundamentada, pero sobre todo; agradable.

Agradecimientos

Al guía espiritual en los menesteres matemáticos, Dr. Francisco Herrera Armendia (por las tertulias neurocientíficas y musicomatemáticas), al Profesor Francisco Miguel Yañez Pichardo (Monseaur Pichard) por sus infinitas tertulias culturales matemáticas, a los Cinco Fantásticos (Silver Charro, Chucho el Roto- Plas, Dr. Klorenzk e Ixtli Salvador) por motivar a realizar diversos shows matemáticos culturales. A dos personajes enigmáticos: Abu Jafar Al Mamey y el Profesor Numerín, por permitir utilizar sus estrategias y desordenes matemáticos en bien de la humanidad. A la Profesora Didya Alicia Rico Flores por compartir su gusto por la historia de la matemática y que supongo ahora estará dialogando con muchos de esos personajes de los que tanto me platicaba.

CITAS

[1] El Programa Nacional para la Actualización Permanente de los Maestros de Educación Básica en Servicio (PRONAP) tiene como objetivo central regular los servicios de formación continua, ampliando las posibilidades de todos los profesores de acceder a una formación permanente de alta calidad que responda a las necesidades educativas de los alumnos de educación básica del país.

[2] El Programa Nacional de Carrera Magisterial es un sistema de estímulos para los profesores de Educación Básica (preescolar, primaria, secundaria y grupos afines), es un sistema de promoción horizontal, en donde los profesores participan de forma voluntaria e individual y tienen la posibilidad de incorporarse o promoverse, si cubren todos los requisitos y se evalúan conforme a lo indicado en los Lineamientos Generales de Carrera Magisterial. El Programa consta de cinco niveles "A", "B", "C", "D" y "E", en donde el docente puede acceder a niveles superiores de estímulo, sin que exista la necesidad de cambiar de actividad.

[3] Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares el propósito es generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes en los temas evaluados.

[4] PISA, por sus siglas en inglés, significa Programme for International Student Assessment. En el INEE se le ha traducido como Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Es un estudio comparativo de evaluación de los resultados de los sistemas educativos, coordinado por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos).

[5] El examen nacional de ingreso EXANI-I proporciona información integral sobre quiénes son los aspirantes que cuentan con mayores posibilidades de éxito en los estudios de nivel medio superior y cuál es su nivel de desempeño en áreas fundamentales para el inicio del bachillerato.

[6] La prueba correspondiente a PLANEA Básica se aplica con el propósito de conocer en qué medida los estudiantes logran dominar un conjunto de aprendizajes esenciales al término tanto de la educación primaria como de la educación secundaria, en dos áreas de competencia: Lenguaje y Comunicación (Comprensión Lectora) y Matemáticas.

[7] La historiografía es el registro escrito de la historia, la memoria fijada por la propia humanidad con la escritura de su propio pasado.

[8] Googlear es un neologismo que es cada vez más común entre los usuarios de internet que utilizan el buscador Google. Su significado se puede traducir por buscar en la web utilizando expresamente el motor de búsqueda Google. La Sociedad Americana de Dialectos eligió el verbo to google como el verbo más útil de 2008.

[9] Cada situación didáctica puede hacer que el sujeto evolucione, y por ello también puede evolucionar a su vez de modo tal que la génesis de un conocimiento puede ser el fruto de una sucesión (espontanea o no) de nuevas preguntas y respuestas

[10] En un ambiente agradable o propicio para el aprendizaje el docente debe entender que el alumno aprende al involucrarse en una actividad intelectual que le permita obtener un conocimiento y utilizarlo en un futuro, siempre por una motivación y no por imposición.

[11] Estos cinco personajes visitan a las escuelas donde se les permita hacer un show diversificado, el gusto es por compartir y mostrar que la

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

matemática no es tan aburrida y complicada a través de sus muy propios estilos, loqueras educativas y alguno que otro desorden mental matemático

[12] La mente disciplinada nos permite sabernos a sí mismos como debemos trabajar de manera constante para mejorar nuestras habilidades y comprensión de nuestro alrededor.

[13] Gardner propone la existencia de 8 inteligencias las cuales trabajan juntas para resolver problemas, y para alcanzar diversos fines culturales: vocaciones, aficiones y similares. Para Gardner el objetivo de la escuela debería ser el de desarrollar las inteligencias y ayudar a la gente a alcanzar fines vocacionales y aficiones que se adecuen a su particular espectro de inteligencias.

[14] La obra musical llamada Sonido 13 está regida por tres fundamentos: Enriquecimiento, Simplificación y Purificación de la música, la Simplificación consiste en el empleo de números en lugar de notas musicales para designar los sonidos ya mencionados. Con la Simplificación, se demuestra con ello que las obras de los más grandes maestros de la música pueden ser modificadas por medio de la numeración para que cualquier persona pueda interpretar, con sólo conocer los números, cualquier obra musical, por complicada o sencilla que esta sea.

REFERENCIAS

[1] SEP; Reforma de la educación secundaria Fundamentación curricular, Matemáticas. Dirección general de desarrollo curricular (2006)
[2] Lucrecia Santibáñez. ; Entre dicho y hecho, formación de maestros de [1] secundaria en México. Revista Mexicana de investigación educativa, enero-marzo 2007, vol. 12, Núm. 32 pp. 305-335.
[3] Alan J. Bishop. ; Enculturación Matemática; Paidos Educación, pp. 17-37 (1991)
[4] Cecilia P.; Irma S.; Didáctica de las matemáticas. Paidos, pp. 65-95 (1994)
[5] Howard Gardner.; La mente no escolarizada. Paidos, pp. 67-90 (1991)
[6] Francisca, Ortíz.; Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Editorial Pax, pp. 88-110 (2001)
[7] Morris Kline.; La pérdida de la incertidumbre. Siglo XXI editores, pp. 1-34 (1980)
[8] Lorenzo S. Alavez. ; El dispositivo didáctico digital para la exploración de conceptos matemáticos. http://www.upaep.mx/index.php?option=com_k2&view=item&id=3271:el-dispositivo-digital-convergencia-analogico-digital-para-la-exploracion-de-conceptos-matematicos&Itemid=2421. Accedido el 10 de agosto del 2016.
[9] Howard Gardner.; Las cinco mentes del futuro. Paidos, pp. 39-71 (2007)
[10] Erick Solís.; La historieta como recurso didáctico en la enseñanza recreativa de la matemática en la escuela secundaria. ENSM Tesis para obtener el grado de licenciatura (2004)
[11] Yves, C.; Marianna, B.; Josep G.: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. SEP Biblioteca para la actualización del maestro, pp. 119-136 (1998)
[12] Alfonso T. Hernández. ; Investigación-acción. Apuntes pedagógicos. http://www.milenio.com/firmas/alfonso_torres_hernandez/Investigacion-accion-educacion_18_479532093.html. Accedido el 10 de agosto del 2016.
[13] Denis Guedj.; El teorema del loro. Anagrama (2000)
[14] Manuel, F.M.; Verónica H.A.: Instrumentos y matemáticas. Las prensas de la ciencia UNAM, pp. 67-93 (2005)
[15] Morris Kline.; El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial, pp. 47-88 (1972)
[16]Carl Sagan.; El mundo y sus demonios. ; SEP Biblioteca para la actualización del maestro, pp. 10-15 (1995)

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Representación de habilidades de lectura y resolución de problemas en educación básica

Sofía López de Nava Tapia# y Miguel Ángel Campos Hernández*.
#Doctorado en Pedagogía, Facultad de Filosofia y Letras, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, s/n, Coyoacán, Cd. Universitaria, 04510, Ciudad de México, México.
*Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación, Universidad Nacional Autónoma de México, Mario de La Cueva, Cd. Universitaria, 04510, Ciudad de México, México.

sofialnt1988@gmail.com; campos@unam.mx

Resumen- **El proceso de adquisición y desarrollo de la comprensión de lectura se ha estudiado desde diferentes aproximaciones teóricas, entre la que más destaca es la perspectiva de la lingüística formal [1]. Por su parte las habilidades numéricas están compuestas por una variedad de procesos cognitivos y conductuales; desde las ciencias cognitivas, la matemática cognitiva y la educación matemática han nombrado a este conjunto de habilidades como sentido numérico [2]. El objetivo del estudio fue conocer cómo se relaciona la comprensión de lectura (oral y escrita) con las habilidades aritméticas básicas mediante un enfoque representacional. Los resultados indican una concordancia con la literatura teórica y metodológica para su análisis; a pesar de las diferenciación de las edades, el desarrollo cognitivo y los grados escolares pudo observarse un perfil representacional para cada habilidad.**

Palabras Clave- Comprensión de lectura, habilidades numéricas, representaciones, discurso.

Abstract- The process of acquisition and development of reading comprehension has been studied from different theoretical approaches, among the most noteworthy is the prospect of formal linguistics [1]. Meanwhile numerical skills are composed of a variety of cognitive and behavioral processes; from cognitive science, cognitive mathematics and mathematics education have named this set of skills and number sense [2]. The objetive of the study was to determine how reading comprehension (oral and written) is related to the basic arithmetic skills through a representational approach. The results indicate a match with the theoretical and methodological literature for analysis; despite differentiation ages, cognitive development and school grades could be observed a representational profile for each skill.

Palabras Clave- Numeracy, reading comprehension, representations, discourse.

I. Introducción

A pesar de la creciente diversificación en la oferta educativa en cuanto a formas escolares y metodologías, y aun tomando en cuenta las difíciles condiciones de infraestructura en muchos casos, una gran parte de la población escolar y la planta docente mantiene perspectivas y nociones poco propicias para un desarrollo educativo integral. Al conocer cómo los estudiantes y profesores representan su participación en la escuela, se pueden aportar elementos fundamentados para un mejoramiento y adecuación del desarrollo escolar y la formación educativa en general. Así mismo, es importante conocer la relación entre las habilidades de comprensión de lectura y de resolución de problemas aritméticos en los niveles básicos de educación.

El desarrollo del pensamiento matemático inicia en preescolar y su finalidad es que los niños usen los principios del conteo; reconozcan la importancia y utilidad de los números en la vida cotidiana, y se inicien en la resolución de problemas y en la aplicación de estrategias que impliquen agregar, reunir, quitar, igualar y comparar colecciones. Estas acciones crean nociones del algoritmo para sumar o restar. Por otra parte desarrollo del lenguaje oral en los preescolares es una habilidad de alta prioridad en su educación; los niños interactúan en situaciones comunicativas y emplean formas de expresión oral con propósitos y destinatarios diversos, lo que genera un efecto significativo en su desarrollo emocional, cognitivo, físico y social al permitirles adquirir confianza y seguridad en sí mismos, e integrarse a su cultura y a los distintos grupos sociales en que participan. La educación preescolar también favorece la incorporación de los niños a la cultura escrita a partir de la producción e interpretación de textos diversos [3].

Todos los días niños, adolescentes y adultos se enfrenta en la vida cotidiana a diversas actividades unificadas por la discriminación de dos tipos de información cuantitativa y cualitativa, un elemento que contribuye con la organización e interacción social es el lenguaje. El lenguaje es una herramienta fundamental para el desarrollo del ser humano a nivel psicológico y social, pues es el vehículo principal para expresar cualquier tipo de pensamiento [4]. Una de las actividades que involucran directamente el lenguaje y con la que diariamente se interactúa en el ámbito académico es el vocabulario general y la lectura de textos escritos.

En el contexto escolar para que los alumnos de educación básica desarrollen la comprensión de lectura es necesario que cuenten con cuatro características fundamentales, que son: conciencia fonológica, principio alfabético, fluidez de lectura y comprensión de lectura [5][6][7].

La comprensión de textos es un proceso extraordinariamente complejo ya que involucra en paralelo diferentes procesos cognitivos y funciones ejecutivas del Sistema Nervioso Central [4], ya que requiere de intervención de los sistemas de memoria y atención, de codificación, percepción y de operaciones inferenciales basadas en los

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

conocimientos previos y en sutiles factores contextuales [8][9].

Desde el paradigma cognitivo, la comprensión puede ser entendida como un proceso constructivo, en el que la información de un estímulo o evento se empareja con otra información existente en la memoria del sujeto [10][8][9]. La comprensión de narraciones es en realidad un proceso constructivo, fruto de la interacción de tres factores: el texto, el contexto y los esquemas cognitivos [9].

La comprensión de la lectura ya sea de forma oral o escrita es un precursor importante de diferentes habilidades como las cognitivas, académicas, sociales e inclusive motivacionales; en especifico una de las corrientes de la psicología cognitiva encargada del estudio de desarrollo de habilidades numéricas ha puesto atención en todos aquellos procesos que se desarrollan paralelamente como es el caso de la comprensión de lectura [11][12][13][14].

La relación que existe entre los conocimientos disciplinares de lectura y matemática desde las teorías cognitivas, puede ser explicado desde la propuesta por Carroll, Horn y Cattell (Teoría CHC) ya que facilita la interpretación del cambio cognitivo ante determinadas tareas además de proveer un fundamento organizado para la evaluación individual del aprendizaje [15]. La lectura y la matemática tienen vinculación en las habilidades cognitivas, ya que la lectura pertenece al grupo de las inteligencias cristalizadas, pues en ella se encuentra, la información general verbal, el desarrollo del lenguaje, el conocimiento lexical, la habilidad de escuchar, la comunicación, la gramática y la producción y fluidez del habla. Por su parte la matemática se concentra en la inteligencia fluida alojada a la par de los procesos de inducción, el razonamiento secuencial general y el razonamiento cualitativo [15].

Es reducida la evidencia empírica de la relación que se establece entre la comprensión de textos y la resolución de problemáticas aritméticas en la educación básica [11][12][13][14]; los estudios están basados en observar la relación del desempeño matemático y la comprensión de lectura, abordando la problemática desde metodologías evolutivas y aproximaciones cognitivas, donde en general se han evaluado las habilidades técnicas de lectura (reconocimiento de letras, y aritmética obteniendo una relación directa entre la comprensión de lectura y el desempeño en la solución de problemas escritos; señalando una relación explicita entre el desarrollo temprano de la comprensión de textos escritos con la adquisición y desarrollo de habilidades numéricas en posteriores grados escolares.

Las habilidades numéricas están compuestas por una variedad de procesos cognitivos y conductuales; desde las ciencias cognitivas, la matemática cognitiva y la educación matemática han nombrado a este conjunto de habilidades como sentido numérico [2]. Si bien para el término propuesto no existe una definición única, el sentido numérico está constituido por conciencia, intuición, reconocimientos, conocimientos, experiencia, habilidad, deseo, sensación, explicación, procesamientos, estructura conceptual y esquemas mentales [2]. En otras palabras el sentido numérico abarca características de intuición elemental sobre la información cuantitativa, incluyendo la percepción rápida y eficaz de numerosidades pequeñas, la habilidad para comparar magnitudes numéricas, el conteo y la comprensión de operaciones aritméticas básicas como la suma y la resta [16].

Dentro del contexto escolar las implicaciones pedagógicas que rodean al sentido numérico son mucho más complejas que únicamente la construcción de intuición ante elementos cuantitativos [2][17], debe ser una forma de pensar que permee todos los aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; poniendo en práctica diferentes estrategias constructivistas que involucren paradigmas relacionados con la concepción teórica y los hallazgos empíricos hasta ahora reportados [2], tal es el caso de la solución de problemas aritméticos.

El constructivismo sostiene que los niños construyen el conocimiento matemático de una manera activa a lo largo de su desarrollo, de ahí que los problemas aritméticos de adición y sustracción se hayan investigado ampliamente según su dificultad, comprensión, procedimientos de resolución y respuestas incorrectas de los alumnos [18].

Los problemas de cambio (suma y resta) se precisan debido a su estructura semántica, considerando la presencia de una acción implícita o explícita que produce un cambio en la cantidad inicial [18]; los problemas de cambio se dividen en tres categorías, la primera refiere a la comprensión de la oralidad del problema llamada problemas razonados, la segunda refiere a la sintaxis de los dígitos arábigos llamada computacional y la tercera refiere al proceso de comprensión de la lectura de un problema contextualizado llamada problemas escritos [18][19].

Existen diversos enfoques sobre el análisis de los procesos cognitivos [8][9][4], sin embargo en el presente estudio se ocupó el procedimiento de análisis predicativo.

En el procedimiento de análisis predicativo se entiende al discurso como una construcción de configuraciones predicativas, compuestas por sujeto y predicado. El análisis textual consiste en identificar elementos tales como a) sujeto, b) conexión predicativa, y c) despliegue predicativo [20][21][22]. El sujeto es identificable ya que esta dado en la pregunta que se hace conforme al tópico elegido; la conexión predicativa está en función del sujeto y es aquella con la que se abre el predicado, la cual también está dada en la pregunta y por último el despliegue predicativo el cual se constituye por un componente central o directo, ya que expresa al objeto y por tanto al significado conceptual, representacional de lo que se pregunta y sobre el cual se construye el predicado [21][22].

El objetivo del estudio fue conocer la representación de conocimiento en habilidades de comprensión de lectura en la modalidad escrita y oral y la resolución de problemas aritméticos de suma y resta en niños de tercer grado de preescolar, primero, segundo y tercer grado de primaria. Además de explorar la forma de aplicación y pertinencia del análisis predicativo del discurso en alumnos de corta edad.

II. Método

Se elaboró un instrumento de tipo papel y lápiz con una estructura abierta constituido por siete ítems. La distribución de los contenidos del instrumento estuvo en función de: a) datos de identificación, b) dos preguntas relacionadas con las habilidades de comprensión de lectura escrita, c) dos preguntas relacionadas con las habilidades de comprensión de lectura oral, y d) tres preguntas relacionadas con las habilidades de resolución de problemas de suma y resta. El instrumento por su estructura y contenido es susceptible al análisis predicativo de la información [20].

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Fueron evaluados once estudiantes de cuatro niveles escolares, éstos fueron tercer grado de preescolar, primero, segundo y tercer grado de primaria, en una sesión de aproximadamente 30 minutos con una forma de aplicación individual.

Para el análisis predicativo la manera de codificación es asignar con las letras iniciales del nombre y apellido del estudiante un código, posteriormente se identifican elementos tales como a) sujeto, b) conexión predicativa, y c) despliegue predicativo, siendo éste ultimo dividido en dos, el primero el aspecto general que es representado en letras cursivas y el segundo el aspecto especifico que es puesto dentro de paréntesis.

III. Resultados

Como se describe en la Tabla I, II, III y IV las respuestas fueron codificadas según la metodología del Análisis Predicativo de Información. En relación con actividades que los niños de tercer grado de preescolar reportaron *(N*= 2) no se observó ningún perfil representacional al cada uno dar respuestas diferentes a cada pregunta.

Como se observa en la Tabal I para las dos primeras preguntas relacionadas con las habilidades de comprensión de lectura escrita al no ser una actividad que ellos realicen las respuestas se agruparon en la carencia del conocimiento y en

Tabla I
Codificación de respuestas preescolar

Pregunta	Respuestas Codificadas por Frecuencia (dos estudiantes preescolar)
1.	*Las arañas* [porque Salvador las agarra: EmND; **1**]; *Me gustan* [todas: JeGR; **1**]; *Todas* [(porque: JeGR; mi mamá: JeGR; siempre: JeGR; me lee cuentos: JeGR); **1**].
2.	*No se* [EmND; **1**]; *Mi mamá* [(siempre me dice: JeGR; pon mucha atención: JeGR; hija: JeGR); **1**].
3.	*Pongo atención* [JeGR; **1**]; *Callarme* [EmND; **1**].
4.	*Mi mamá* [siempre me los lee: JeGR; **1**]; *Veo* [en mi mente: EmND; **1**]; *Yo tengo un libro* [JeGR; **1**].
5.	*Le pido ayuda* [a la maestra: EmND; **1**]; *Mi mamá me pone los resultados* [JeGR; **1**].
6.	*Cuento/ Contar* [con los dedos: JeGR; **1**]; *No se* [EmND; **1**].
7.	*Mi mamá* [(siempre me dice: JeGR; pon mucha atención: JeGR; a lo que te voy a decir: JeGR; **1**]; *No se* [EmND; **1**].

reportar las actividades que otros hacen (e.g. *Mi mamá…*) al momento leer. Las respuestas para las preguntas sobre la lectura de forma oral o receptiva los pequeños reportaron procesos cognitivos y conductuales como *poner atención, callarme, ver*. Sus respuestas en relación con la resolución de problemas de suma y resta, fueron el desconocimiento del tema y el auxilio de figuras mediadoras de conocimiento como fueron en este caso la madre y la profesora.

En la Tabla II se observa el análisis de los alumnos de primer grado de primaria (*N*= 3), en donde a diferencia de los niños de preescolar en los dos primeros reactivos su respuesta está orientada al reconocimiento de uno de los géneros literarios más conocidos por los niños como es el cuento. A pesar que es una actividad en la que comienzan a incursionar existe un cierto desconocimiento en relación a las estrategias que emprenden en el momento de comprender un texto escrito. Por otra parte una de las actividades con la que esta familiarizados es con la lectura de tipo oral, ya que se encontró un perfil representacional ante la pregunta -*¿Cuándo escuchas una historia tu qué haces?*- ya que dos de ellos señalaron *escuchar*. Por último se encontró un perfil representacional sobre la forma en que resuelven problemas aritméticos de suma y resta, reportando al *conteo* como la actividad necesaria para poder llegar a una respuesta.

Tabla II
Codificación de respuestas primer grado de primaria

Pregunta	Respuestas Codificadas por Frecuencia (tres estudiantes primero de primaria)
1.	*Cuentos* [(porque tienen: ErLT; cosas: ErLT; bonitas: ErLT); **1**]; *La princesita Sofía* [porque esta bonita: ShMA; **1**]; *Leer* [(el cuento: MeHM; de la Sirenita: MeHM); **1**].
2.	*Leer bien* [MeHM; **1**]; *Me pongo nerviosa* [ShMA; **1**]; *Repito* [(las palabras: ErLT; hasta que: ErLT; las pueda entender: ErLT); **1**].
3.	*Escucho* [ShMA; (como leo: MeHM); **2**]; *Me emociono* [(porque estoy aprendiendo: ErLT; a leer: ErLT); **1**].
4.	*Me pongo a escuchar /escucho* [ShMA;**1**]; *Entender* [cómo cuentan: MeHM; el cuento: MeMH); **1**]; *Le pregunto* [(a mi mamá: ErLT; qué significa: ErLT); **1**].
5.	*Cálculo/ contar* [(en mi mente: ErLT; si así: ErLT; para que lo escriba: ErLT; con los dedos: MeHM); **2**]; *Estoy sentada* [(haciendo lo que me dijo: ShMA; la maestra: ShMA); **1**].
6.	*Contar* [con los dedos: ShMA; **1**]; *Debajo de los números* [que escribí: ErLT; **1**]; *Empezar por el lado*[derecho: MeMH; **1**].
7.	*No se* [ShMA; **1**]; *Empezar de lado* [derecho: MeMH; **1**]; *Pregunto* [a la maestra: ErLT; **1**].

Tabla III
Codificación de respuestas segundo grado de primaria

Pregunta	Respuestas Codificadas por Frecuencia (tres estudiantes de segundo de primaria)
1.	*Caperucita Roja* [porque es: YoLR; una caricatura: YoLR); **1**]; *Las de risa* [(porque son: ErGR; muy divertidas: ErGR); **1**]; *Ninguna* [SaND; **1**].
2.	*Escuchar* [ErGR; **1**]; *Leerla* [muchas veces: SaND; **1**]; *No le entiendo* [YoLR; **1**].
3.	*Callarme* [YoLR; **1**]; *Escucho* [SanD; **1**]; *Guardo silencio* [ErGR; **1**]; *Pongo atención* [YoLR; **1**].
4.	*Poner atención* [SaND; **1**]; *Responder* [ErGR; **1**]; *Usar la cabeza* [YoLR; **1**]; *Voy poniendo las respuestas* [(en un cuaderno: YoLR; que ya no uso: YoLR); **1**].
5.	*Contar* [con los dedos: SaND; **1**]; *Sumar* [ErGR; **1**]; *Uso* [(mi cabeza: YoLR; mis dedos: YoLR); **1**].
6.	*Cuento* [SaND; **1**]; *En mi cabeza* [lo resuelvo: YoLR; **1**]; *Escribiéndolo* [YoLR; **1**]; *Sumando* [(primero de un lado: ErGR; terminado del otro; ErGR); **1**].
7.	*Debajo de la resta* [SaND; **1**]; *En el pizarrón* [YoLR; **1**]; *Quitándole* [ErGR; **1**].

Por su parte los niños de segundo grado de primaria (*N*= 3) contestaron con mayor aspectos generales en comparación con los otros dos casos, en los reactivos asociados a la comprensión de lectura escrita los alumnos respondieron identificando géneros literarios, además de reportar estrategias tales como *escuchar* y *leerla muchas veces* para su comprensión. Con las lecturas orales los alumnos reportaron *guardar silencio*, *escuchar* y *poner atención*; mientras que para poder entender lo que se les está leyendo dijeron *poner atención*, *responder*, *usar la cabeza* y *escribir*. Mientras que para resolver problemas de suma y resta dicen *contar* y *usar su cabeza* además de que por estrategia contestaron el *uso de su cabeza* y de los *dedos* además de explícitamente nombrar a la *suma* véase Tabal III.

Por último los estudiantes de tercer grado de primaria (*N*= 3), al igual que los de segundo diferenciaron entre los géneros de textos. En las siguientes tres preguntas como se describe

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

en la Tabla IV se observó un patrón muy similar de respuestas, sin poder obtener una acumulación de frecuencias en algún aspecto general, por el contrario en la resolución de problemas de suma y resta se encontró un perfil representacional ligado a la expresión explicita de las operaciones aritméticas de *suma* y *resta*.

En la Tabla V se observa un comparativo en donde se concentraron las respuestas de los 11 estudiantes sin diferenciación de grado escolar, ahí puede apreciarse los perfiles representacionales por pregunta realizada entre los que destacan procesos como *escuchar*, *leer*, *poner atención*, *contar* e inclusive el desconocimiento de estrategias para comprender textos y resolver problemas de resta a través de la respuesta *No sé*.

V. DISCUSIÓN

El conocimiento incluye lo que se sabe acerca de algún segmento de la realidad en algún nivel de profundidad y precisión, desde lo más informal y superficial, hasta lo más formal, amplio y profundo [20], en este caso los estudiantes mostraron un nivel de conocimiento que sí bien podría catalogarse por rudimentario es un conocimiento cimentado bajo las experiencias que han ido adquiriendo en una corta trayectoria académica y de acuerdo a su desarrollo cognitivo [23], además de demostrar un patrón evolutivo entre las respuestas según se edad cronológica y el periodo escolar cursado al momento de la aplicación.

Tabla IV
Codificación de respuestas tercer grado de primaria

Pregunta	Respuestas Codificadas por Frecuencia (tres estudiantes de tercero de primaria)
1.	*Cuentos* [AnMV; **1**]; *La Bella y la Bestia* [MiMA; **1**]; *La leyenda* [de Guanajuato: AdMV; **1**].
2.	*Lo dibujo* [MiMA; **1**]; *No se* [AnMV; **1**]; *Volver a leer* [AdMV; **1**].
3.	*Le entiendo* [AdMV; **1**]; *Lo veo* [en el cuento: MiMA; **1**]; *Pongo atención* [AnMV; **1**].
4.	*Escucho* [MiMA; **1**]; *Lo grabo* [AdMV; **1**]; *Ver* [los dibujos: AnMV; **1**].
5.	*Restar* [AdMV; AnMV; **2**]; *Lo veo* [MiMA; **1**]; *Sumar* [AdMV; **1**].
6.	*Sumando/ sumarlos* [AdMV; MiMA; **2**]; *Entender* [AnMV; **1**].
7.	*En el cuaderno* [AdMV; **1**]; *Quitándole* [MiMA; **1**]; *Saber* [AnMV; **1**].

En la Tabla V se observa un comparativo en donde se concentraron las respuestas de los 11 estudiantes sin diferenciación de grado escolar, ahí puede apreciarse los perfiles representacionales por pregunta realizada entre los que destacan procesos como *escuchar*, *leer*, *poner atención*, *contar* e inclusive el desconocimiento de estrategias para comprender textos y resolver problemas de resta a través de la respuesta *No sé*.

Tabla V
Codificación de respuestas Análisis Predicativo de información Comparativa

Pregun	Respuestas Codificadas por Frecuencia (once estudiantes)
1.	*Cuentos* [AnMV; (porque tienen: ErLT; cosas: ErLT; bonitas: ErLT); **2**]; *Caperucita Roja* [porque es: YoLR; una caricatura: YoLR); **1**]; *La Bella y la Bestia* [MiMA; **1**]; *La leyenda* [de Guanajuato: AdMV; **1**]; *La princesita Sofia* [porque esta bonita: ShMA; **1**]; *Las arañas* [porque Salvador las agarra: EmND; **1**]; *Las de risa* [(porque son: ErGR; muy divertidas: ErGR); **1**]; *Leer* [(el cuento: MeHM; de la Sirenita: MeHM); **1**]; *Me gustan* [todas: JeGR; **1**]; *Ninguna* [SaND; **1**]; *Todas* [(porque: JeGR; mi mamá: JeGR; siempre: JeGR; me lee cuentos: JeGR); **1**].
2.	*Leer/ Leerla* [(bien: MeHM; muchas veces: SaND); **2**]; *No se* [EmND; AnMV; **2**]; *Escuchar* [ErGR; **1**]; *Lo dibujo* [MiMA; **1**]; *Me pongo nerviosa* [ShMA; **1**]; *Mi mamá* [(siempre me dice: JeGR; pon mucha atención: JeGR; hija: JeGR); **1**]. *No le entiendo* [YoLR; **1**]; *Repito las palabras* [(hasta que: ErLT; las pueda entender: ErLT); **1**]; *Volver a leer* [AdMV; **1**].
3.	*Escucho* [ShMA; SanD; (como leo: MeHM); **3**]; *Pongo atención* [JeGR; YoLR; AnMV; **3**]; *Callarme* [EmND; YoLR; **2**]; *Guardo silencio* [ErGR; **1**]; *Le entiendo* [AdMV; **1**]; *Leer bien* [MeHM; **1**]; *Lo veo* [en el cuento: MiMA; **1**]; *Me emociono* [(porque estoy aprendiendo: ErLT; a leer: ErLT); **1**].
4.	*Me pongo a escuchar /escucho* [ShMA; MiMA; **2**]; *Entender* [cómo cuentan: MeHM; el cuento: MeMH); **1**]; *Le pregunto a mi mamá* [qué significa: ErLT; **1**]; *Lo grabo* [AdMV; **1**]; *Mi mamá* [siempre me los lee: JeGR; **1**]; *Poner atención* [SaND; **1**]; *Responder* [ErGR; **1**]; *Usar la cabeza* [YoLR; **1**]; *Veo* [en mi mente: EmND; **1**]; *Ver* [los dibujos: AnMV; **1**]; *Voy poniendo las respuestas* [(en un cuademo: YoLR; que ya no uso: YoLR); **1**]; *Yo tengo un libro* [JeGR; **1**].
5.	*Cálculo/ contar* [(en mi mente: ErLT; si así: ErLT; para que lo escriba: ErLT; con los dedos: MeHM; SaND); **3**]; *Restar* [AdMV; AnMV; **2**]; *Sumar* [ErGR; AdMV; **2**]; *Estoy sentada* [(haciendo lo que me dijo: ShMA; la maestra: ShMA); **1**]; *Le pido ayuda* [a la maestra: EmND; **1**]; *Lo veo* [MiMA; **1**]; *Mi mamá me pone los resultados* [JeGR; **1**]; *Uso* [(mi cabeza: YoLR; mis dedos: YoLR); **1**].
6.	*Cuento/ Contar* [SaND; (con los dedos: JeGR; ShMA; **3**]; *Sumando/ sumarlos* [AdMV; MiMA; (primero de un lado: ErGR; terminado del otro; ErGR); **3**]; *Debajo de los números* [que escribí: ErLT; **1**]; *Empezar por el lado*[derecho: MeMH; **1**]; *En mi cabeza* [lo resuelvo: YoLR; **1**]; *Entender* [AnMV; **1**]; *Escribiéndolo* [YoLR; **1**]; *No se* [EmND; **1**].
7.	*No se* [EmND; ShMA; **2**]; *Debajo de la resta* [SaND; **1**]; *Empezar de lado* [derecho: MeMH; **1**]; *En el cuaderno* [AdMV; **1**]; *En el pizarrón* [YoLR; **1**]; *Mi mamá siempre me dice* [pon mucha atención: JeGR; a lo que te voy a decir: JeGR; **1**]; *Pregunto* [a la maestra: ErLT; **1**]; *Quitándole* [ErGR; MiMA; **1**]; *Saber* [AdVM; **1**].

Ante las habilidades implicadas en la comprensión de lectura (escrita u oral) se observó que para el caso de la lectura escrita los niños representaron su conocimiento mediante la identificación de historias pertenecientes a textos de carácter continuo [24], nombrando los títulos de su preferencia (e.g. *Caperucita Roja, La Bella y La Bestia, La princesita Sofía*, entre otros) por lo que puede inferirse una diferenciación entre los género de los textos, predominando el cuento. Por otra parte las actividades reportadas para comprender una lectura de forma oral indican la representación de diferentes recursos cognitivos [15][8][4] tales como percepción (reportado mediante *escuchar*) y la *atención*, además de parámetros conductuales como *guardar silencio* ante su ocurrencia.

En relación con las habilidades que los alumnos reportaron ejercer al resolver un problema aritmético de adición y sustracción, el perfil representacional de los casos evaluados tiene concordancia con lo propuesto por Dehaene (2001) al mencionar como actividad principal para la resolución de problemas al conteo. También se relacionó como habilidad el uso de los dedos, aspecto que la literatura ha clasificado como estrategia de conteo lo que corresponde con una acción explicita de tipo concreta [18], también los alumnos reportaron estrategias de tipo cognitivas [17] a través de la expresión *uso mi cabeza*. Mediante el análisis se observó una evolución de habilidades reportadas que van de las acciones explicitas (*usar dedos*) a las acciones implícitas (*contar, usar mi cabeza*) [18] en la resolución de problemas de suma y resta.

Como se observa y se detalla en los resultados a pesar de los pocos casos elaborados y analizados, se hallaron perfiles representacionales en su mayoría para la habilidad de resolver problemas aritméticos de suma y resta, empero los perfiles representacionales encontrados en las habilidades de la comprensión de lectura señalan una carencia tanto del acto de lectura perceptiva como las estrategias de entendimiento de la misma.

A nivel grupal con la totalidad de los estudiantes a pesar de las diferenciaciones características por la edad, el desarrollo cognitivo [23] y el grado escolar cursado se pudieron obtener perfiles representacionales para cada habilidad, lo que señala un conocimiento general de procesos de lectura ya sea la que escuchan o la que ellos mismos leen además conocer y utilizar operaciones aritméticas tales como suma y resta, en otras palabras, los niños con sus diferentes características no ignoran las tres habilidades que se exploraron sino que por el contrario poseen una noción que conforme al grado escolar y demás características ya mencionadas, va profundizándose.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

IV. Conclusiones

De acuerdo con los resultados reportados por diferentes escalas de evaluación a nivel nacional e internacional, el conjunto de conocimiento en lectura y matemática con los que cuenta el alumno es resultado de las múltiples deficiencias presentes desde los primeros años de formación básica.

Como ya fue discutido la exploración y el análisis del perfil representacional de los estudiantes sobre la relación entre las habilidades de comprensión lectura en la modalidad oral y escrita con aquellas empleadas para la resolución de problemas aritméticos, fueron concordantes con el nivel de desarrollo de los alumnos, también se aportó un nuevo conocimiento sobre la producción de discurso por parte de los niños mediante las respuestas emitidas en el instrumento, además se obtuvo contenido representacional novedoso, que sí bien fueron pocos los casos analizados pudieron hallarse coincidencias predicativas y semánticas en la mayoría de ellos.

En conclusión el objetivo del estudio fue alcanzado al poder aplicar y analizar de forma cualitativa las respuestas de los estudiantes de los cuatro grados escolares. Los hallazgos del análisis están en función de la información que conformó a cada perfil representacional del grupo en relación a las preguntas sobre las habilidades de comprensión de lectura escrita (Tabla V, p. 1 y 2), las habilidades de comprensión de lectura oral (Tabla V, p. 3 y 4) y las habilidades empleadas en la resolución de problemas aritméticos (Tabla V, p. 5, 6 y 7), lo cual dirige hacia aspectos relevantes como: a) la información representacional obtenida no solo es susceptible al análisis teórico sino que guarda concordancia con la literatura propuesta; b) los alumnos expresaron explícitamente a nivel semántico y lingüístico el uso de procesos cognitivos básicos para las habilidades testadas (e.g. *escuchar, poner atención, pensar, contar*), c) por lo que genera nuevas directrices de análisis como el desarrollo de la metacognición o de la autorregulación [25] en sus propias habilidades; d) por último se comprobó la pertinencia del instrumento y del análisis predicativo en edades de entre seis y nueve años.

Referencias

[1] Evans, V., Bergen, B. &, Zinken, J. (2007). The cognitive linguistics Enterprise: an overview. En V. Evans, B, Bergen y J. Zinken (Eds.), *The Cognitive Linguistics Reader*, Equinox Publishing, Londres, 1-60.

[2] Berch, D. (2005). Making sense of number sense: implications of children with mathematical disabilities. *Jorunal of Learning Disabilities*, 1, 333-339.

[3] Programa de Estudio. (2011). Plan de Estudios 2011: Educación Básica. Documento Recuperado de: http://basica.sep.gob.mx/dgdc/sitio/pdf/PlanEdu2011.pdf 02/02/2015 13:20 hrs.

[4] Smith, E. & Kosslyn, S. (2008). Lenguaje. En E. Smith y S. Kosslyn (Eds.), *Procesos Cognitivos: Modelos y Bases Neurales*, Pearson, España, 509- 562.

[5] Salgado, C. & Capellini, S. (2008). Programa de Remediaco Fonologica em Escolares com dyslexia do desenvolvimento. *Revista Actualizacao Cientifica*, 20 (1), 31-36.

[6] Gómez, F. (2008). El desarrollo de la competencia lectora en los primero grados de primaria. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 3 (4), 95-126.

[7] Pérez, P. (2008). La comprensión lectora y la competencia en comunicación lingüística en el nuevo marco curricular: algunas claves para su desarrollo. *Participación Educativa*, (8), 41-56.

[8] Pollatsek, A. & Rayner, K. (2005). Reading. En K. Lamberts y R. Goldstone (Eds.), *Handbook of Cognition*. Sage Piblications, Gran Bretaña, 241- 254.

[9] Vega de, M. (2006). Comprensión. En M. de Vega (Ed.), *Introducción a la Psicología Cognitiva*. Alianza Psicología, Madrid, 367- 438.

[10] Garnham, A. (2005). Language Comprehension. En K. Lamberts y R. Goldstone (Eds.), *Handbook of Cognition*. Sage Piblications, Gran Bretaña, 241- 254.

[11] Geary, D., Hamson, C. &, Hoard, M. (2000). Numerical and Arithmetical Cognition: A Longitudinal Study of Process and Concept Deficits in Children with Learning Disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, (77), 236- 263.

[12] Jordan, N., Hanich, L. &, Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competences in children with specific mathematics difficulties versus childres with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development*, 74 (3), 834-850.

[13] Vilenius, P., Aunola, K. &, Nurmi, J. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, 28 (4), 409-426.

[14] Vukovic, R., Lesaux, N. &, Siegel, L. (2010). The mathematics skills of children with reading difficulties. *Learning and Individual Differences*, (20), 639-643.

[15] Flanagan, D. & Dixon, S. (2004). The Cattell-Horn-Carroll theory of cognitive abilities. En John Wiley (Ed.) *Encyclopedia of Special Education*. Recuperado el 17/08/2015 de: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9781118660584.ese0431/pdf

[16] Dehaene, S. (2001). Precis of the number sense. *Mind & Language*, 16, 16-36.

[17] Carr, M. & Alexeev, N. (2011). Fluency, accuracy, and gender predict developmental trajectories of arithmetic strategies. *Journal of Educational Psychology*, 3 (103), 617- 631.

[18] Díaz, J. & Bermejo, V. (2007). Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (3), 335- 364.

[19] Negen, J. & Sarnecka, B. (2012). Number- concept: acquisition and general vocabulary development. *Child Development*, 6 (83), 2019-2027.

[20] Campos, M. & Gaspar, S. (1999). Representación y construcción de conocimiento. Perfiles Educativos, (21: 83-84), 27-49.

[21] Campos, M. & Gaspar, S. (2009). Discurso y construcción de conocimiento. En M.A. Campos (Ed.) Discurso, construcción de conocimiento y enseñanza, Plaza y Valdés, México, 22-58.

[22] Campos, M., Gaspar, S. &, Velásquez, B. (2015). Discurso y representaciones de estudiantes de bacteriología y trabajo social. Revista Iberoamericana de Educación Superior, 15 (6), 50-70.

[23] Papalia, D., Olds, S. &, Feldman, R. (2005). Desarrollo físico y cognoscitivo en la niñez intermedia. En D. Papalia, S. Olds y R. Feldman, *Desarrollo Humano*, McGraw Hill, México.

[24] Parodi, G. (2010). Saber leer, México*: Aguilar*, 1- 223.

[25] Flores, R., González, J. &, García E. (2015). Adolescentes pobres lectores: evaluación de procesos cognoscitivos básicos. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, (17: 2), 1-18.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Situaciones de modelación como práctica social generadora de saberes. Su gestión en educación secundaria

Santiago Ramiro Velázquez[#], René Santos Lozano[*]
#Jefatura de Enseñanza, Secretaría de Educación Guerrero. Av. Universidad s/n, Fraccionamiento Magallanes, Acapulco, Guerrero, México.
*Esc. Prep. No. 21 de la Universidad Autónoma de Guerreo, Av. Galeana s/n, San Marcos, Guerrero, México.
sramiro@prodigy.net.mx,santos_oasis@hotmail.com

***Resumen*-Reportamos una investigación en proceso sobre lectura y construcción de gráficas, a través de situaciones de modelación, en matemáticas de educación secundaria. Sostenemos que esta lectura y construcción se puede abordar como modelación, donde los alumnos descubren de qué manera se constituyen socialmente las ideas, nociones y conceptos, integrados a procedimientos y vías. Documentamos la escolarización del saber en este ámbito, en términos de que se imponen a los alumnos los criterios de profesores y libros de texto, en detrimento de su autonomía. El objetivo de la investigación consiste en seleccionar, diseñar y gestionar situaciones de modelación en el aprendizaje de lectura y construcción de gráficas. El trabajo se fundamenta en la socioepistemología y el enfoque metodológico es cualitativo. Los resultados muestran que los alumnos participantes trabajan estas situaciones, utilizando diversos modelos y argumentos.**

***Palabras clave*- gráficas, modelación, práctica social, situaciones.**

***Abstract*-We report an ongoing investigation about reading and building graphics, through modeling situations in secondary mathematics education. We argue that this reading and construction can be addressed as modeling, where students discover how socially are the ideas, notions and concepts, procedures and integrated way. We document the schooling of knowledge in this area, in terms of imposition of the criteria of teachers and textbooks to students, to the detriment of their autonomy. The objective of the research is to select, design and manage situations modeling in learning reading and building graphics. The work is based on the socioepistemology and methodological approach is qualitative. The results show that participating students work these situations, using various models and arguments**

***Key words*- graphics, modeling, situations, social practice.**

I. Introducción

En este trabajo se dan a conocer avances de una investigación en proceso sobre el aprendizaje de lectura y construcción de gráficas, a través de situaciones de modelación. Ubicados en el manejo de la información, como uno de los ejes que vertebran las matemáticas en educación secundaria. Nos enmarcamos en las siguientes tesis sobre modelación, [1] considera que la modelación es una práctica que ejercen estudiantes y profesores en diversos escenarios y contextos, en respuesta a una situación o fenómeno de interés para los alumnos. En [2] sostienen la pertinencia didáctica del uso de las gráficas en la modelación y explican bases epistemológicas, sobre sus potencialidades didácticas. Estos argumentos son "La gráfica antecede a la función, la gráfica es argumentativa y las gráficas tienen un desarrollo" [2, pp. 323-325]. Esta posición epistemológica a su vez se fundamenta en las obras de Oresme *De proportionibus proportionum* y *Tractatus de latitudinubis formarun* [3], en las que aborda la figuración de cualidades que puede resumirse con una de las preguntas que plantea, "¿Por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían?" [3, p. 339]. Esas ideas de Oresme tienen relación con las afirmaciones de Arquímedes de Siracusa, al sostener y demostrar mediante su "Método" [4], que para encontrar proporciones matemáticas hay que valerse de representaciones mecánicas y geométricas.

Las posiciones mostradas en líneas anteriores conforman una base de orientación en el diseño y puesta en acción de situaciones de aprendizaje, a través de la modelación.

En el problema de investigación constatamos que en la actividad docente, por lo general se escolariza el saber referente a lectura y construcción de gráficas, al imponerse los criterios de profesores y libros de texto, que por una parte obstaculizan el trabajo autónomo de los alumnos y por otra dificultan reconocer sus usos, significados y construcción a través de la modelación como práctica social. Este problema incrementa su relevancia al considerar que de los 107 apartados que integran los contenidos en los tres grados de educación secundaria, 24 son del ámbito que investigamos. El objetivo de la investigación que reportamos consiste en seleccionar, diseñar y gestionar situaciones de modelación en el aprendizaje de lectura y construcción de gráficas, con profesores y alumnos de educación secundaria. El enfoque metodológico es cualitativo en términos de estudio de casos.

II. Fundamentación teórica

Esta investigación se sustenta en la socioepistemología, posición teórica construida por la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa para explicar la construcción social del conocimiento, vía la enseñanza y el aprendizaje. Esta fundamentación teórica surge en la escuela mexicana en las última décadas del siglo XX, con el propósito de explorar formas de pensamiento matemático dentro y fuera de la escuela [5]. Con lo que a los saberes existentes hasta ese momento que consideran el denominado triángulo didáctico alumno-profesor-saber, habrá que incorporar la dimensión social-cultural, que al considerar las condiciones

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

de surgimiento y usos sociales del conocimiento matemático, explica cómo viven o se propone que vivan las situaciones de aprendizaje en escenarios escolares y no escolares. " … esto condujo a un cambio en la centración: dejar de analizar exclusivamente a los conceptos matemáticos para empezar a analizarles con las prácticas que acompañan a su producción y que hacen posible su trascendencia de una generación a otra" [5, p. 46].

En este trascender del conocimiento tiene presencia un discurso matemático escolar y no escolar, y precisamente las prácticas sociales conforman discursos que favorecen la comunicación en matemáticas y la generación de emociones y actitudes positivas por personas y comunidades. De esta manera se crean ambientes propicios para ir del conocimiento al saber.

En este sentido concebimos que alumnos, profesores, familias, comunidades con sus creencias, identidades, cultura, compromisos y problemas conviven y evolucionan en diversas prácticas sociales. De manera que los saberes emergen de estas prácticas en donde las personas no se limitan a verificar lo que hacen sino a problematizar del por qué lo hacen así. Al explicar las condiciones del por qué, cómo, para qué lo hacen y cómo ellas se transforman al ejercer estas prácticas. Actuar en estos términos significa romper con la escolarización del saber donde se imponen de manera casi vertical, los cánones concebidos por las instituciones, profesores y materiales de apoyo. Para formar en el mejor de los casos a personas dependientes de las circunstancias que les rodean.

Como una evidencia de dicha escolarización miremos la ilustración de la fig. No.1 referente a una situación 3 de modelación. Referente al contenido "Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos" [6, p. 43], en la que se expresa que una alumna se desplaza a distintas velocidades en tres trayectos, al final de cada uno se detiene durante 15 segundos y prosigue. Se propone a un grupo de alumnos –de segundo grado de educación secundaria- experimenten este planteamiento, visualicen, registren, realicen distintas lecturas de esta situación y la comuniquen utilizando diversos modelos. Estos alumnos en un primer momento proponen a uno de sus compañeros a que se desplace como lo marca la situación, y la representan en un modelo gráfico en donde prevalecen relaciones cuantitativas, donde si bien se visualiza la relación distancia-velocidad, no se medita sobre los tipos de modelos gráficos más adecuados para responder a la exigencia planteada. No obstante, los alumnos se organizan, proponen maneras de responder a la exigencia, dan a conocer lo realizado, lo defienden y reconocen que hay otros modelos propios de lo que se solicita hacer. De manera que lo realizado muestra rudimentos de la práctica de modelación.

Sobre la base de estas posiciones, sostenemos que la lectura y construcción de gráficas que se trabaja en diversos momentos y a lo largo de los tres grados de educación secundaria, se aborde como práctica de modelación en la que las personas a partir de una serie de situaciones, seleccionen las de su interés, investiguen al respecto y construyan modelos que representen y expliquen la relevancia del caso seleccionado. De manera que como se afirma en líneas anteriores, los alumnos expresen cómo trasforman y cómo se transforman al realizar esta práctica." … la modelación posee su propia estructura, está constituida por un sistema dinámico, puede llevar a cabo realizaciones múltiples y hacer ajustes a su estructura para llegar al resultado deseable, es un medio que propicia el razonamiento y la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea

Fig. 1. Modelo gráfico mediante el cual un grupo de alumnos comunica la situación 3.

en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones" [2, p. 2].

De esta forma la modelación se constituye en un medio para generar saberes y por ende puede transferirse a una infinidad de situaciones y escenarios. Se trata de un medio potente ya que en educación secundaria se estudian modelos aritméticos, algebraicos, analíticos, tabulares, científicos, etcétera.

III. METODOLOGÍA

La metodología que se utiliza en este trabajo es de corte cualitativo con énfasis en estudio de casos, y se integra con diversas actividades para el logro del objetivo de la investigación. En este marco se hace un análisis del estado del estudio del arte a fin de explicar diversas posiciones sobre la modelación como práctica social, en el campo de lectura y construcción de gráficas. Para conformar el marco teórico, seleccionar y estructurar situaciones de modelación y gestionarlas con cuatro profesores y 20 alumnos de escuelas secundarias de Acapulco, Guerrero, México. Como parte de esta gestión realizamos un proceso de autosensbilización con los profesores, en el que analizamos y nos aplicamos el cuestionario de creencias del profesor [7], ya contiene una serie de preguntas para conocer condiciones de los docentes. También trabajamos talleres en los que constatamos cómo emergen los conocimientos sobre lectura y construcción de gráficas, en la modelación. Al proponer situaciones de aprendizaje en este ámbito.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

IV. ESTUDIO DEL ESTADO DEL ARTE

En este apartado se analizan diversas investigaciones que estudian la modelación o la graficación, a fin de reconocer tendencias en este ámbito y aportes sobre la construcción de saberes en escenarios escolares y no escolares.

[8] hacen un estudio del uso de las gráficas por medio de un análisis del discurso matemático plasmado en los libros de texto de educación básica. Se enfocan en el uso de las gráficas a fin de revelar la función de esta práctica social y las formas de desarrollo del uso del conocimiento. [2] sostienen la pertinencia didáctica del uso de las gráficas en la modelación y explican bases epistemológicas que aportan argumentos, sobre las potencialidades didácticas del uso de gráficas en la modelación. Estos argumentos son "La gráfica antecede a la función, la gráfica es argumentativa y las gráficas tienen un desarrollo" [2, p. 223-225].

Por su parte [9] estudia un campo de prácticas sociales como una unidad de análisis abierta, en el sentido de entrelazar vías entre las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural, y con otras dimensiones. En la generación y difusión de saberes, donde lo conceptual y algorítmico se produce en su concepción más amplia e integrados.

[10] explora qué lecturas e interpretaciones hacen los alumnos de educación básica, de las gráficas publicadas en diversos medios de información. Con el propósito de analizar concepciones propias de los alumnos y el papel de las gráficas en la comprensión de conceptos o propiedades matemáticas y desarrollo del pensamiento. [11] investiga sobre la modelación y las gráficas, constatando que los alumnos del nivel medio superior confunden las características de una recta con su altura y su pendiente.

Un aspecto relevante en esta lectura y construcción que está ausente en la escuela, corresponde a las condiciones de surgimiento de las gráficas, en las que los trabajos de Oresme, plasmados en su tratado *figuración de cualidades*, revelan la cuantificación de las formas variables. En este tratado se puede ver que las figuras geométricas y las proporciones matemáticas son importantes en el estudio de fenómenos de variación.

Sostenemos que la lectura y construcción de gráficas que se trabaja en diversos momentos y a lo largo de los tres grados de educación secundaria, se aborde como práctica de modelación en la que las personas a partir de una serie de situaciones, seleccionen las de su interés, investiguen al respecto y construyan modelos que representen y expliquen la relevancia de estas situaciones. De manera que como se afirma en líneas anteriores, los alumnos expresen cómo trasforman y cómo se transforman al realizar esta práctica. " … la modelación posee su propia estructura, está constituida por un sistema dinámico, puede llevar a cabo realizaciones múltiples y hacer ajustes a su estructura para llegar al resultado deseable, es un medio que propicia el razonamiento y la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones" [2, p. 2].

Como se puede mirar en estas posiciones se refleja la necesidad de un rediseño del discurso matemático escolar, en el que predominen las prácticas sociales, particularmente la modelación. De manera que estas prácticas sean un fundamento en la construcción de saberes dentro y fuera de la escuela, en un ambiente de equidad donde nadie impone y los alumnos como integrantes de grupos poblematizan sobre lo que hacen, por qué lo hacen así, cómo transforman las situaciones hacia el logro de objetivos y cómo ellos se transforman.

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para seleccionar, diseñar y gestionar situaciones de aprendizaje como práctica de modelación, realizamos un taller con profesores de educación secundaria, donde intercambiamos saberes y experiencias sobre aspectos principales de la socioepistemología, a la vez analizamos distintas situaciones de modelación como práctica social. A fin de hacer una revaloración y significación colectiva. En este taller se estructuran y gestionan algunas situaciones de modelación, una sobre desplazamiento de alumnos en el salón de clases o en otros escenarios, donde se manejan relaciones tiempo distancia y tiempo velocidad. Esta consiste en proponer a estudiantes de segundo grado de educación secundaria una práctica con tres acciones, acción 1. Desplazamiento de una persona a velocidad constante y su regreso al lugar de partida a igual velocidad. Otra hace un desplazamiento similar con velocidad constante pero diferente en la ida a la del regreso. Acción 2. Un alumno se ubica en un punto determinado y ahí permanece por 30 segundos. Acción 3. Una alumna avanza en tres trayectos diferentes con velocidad distinta en cada uno, al final de cada trayecto se detiene por 15 segundos y prosigue. Se solicita a los estudiantes organizarse y realizar distintas lecturas de esta situación y comunicarlas utilizando diversos modelos.

En la figura No. 2 se puede ver parte de las producciones de un equipo de alumnos para responder a las exigencias de la acción 3, en la que se muestra una lectura adecuada y su correspondiente comunicación por medio de un modelo gráfico. En general, los procesos y resultados muestran que un 75 % de los alumnos participantes explican las situaciones planteadas utilizando diversos modelos y argumentos construidos de manera colaborativa.

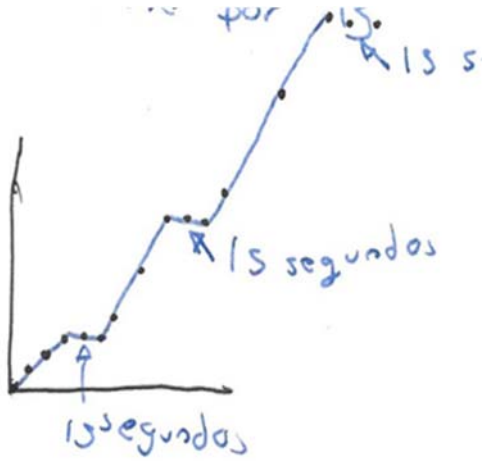


Fig. 2. Parte de las producciones de un equipo de alumnos para responder a las exigencias de una de las prácticas

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

También se ha puesto en práctica una situación sobre llenado de recipientes, con procesos y resultados similares a los de la situación anterior. Esta se enmarca en el contenido de tercer grado de educación secundaria "Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera" [6, p. 49].

Finalmente se estructura y gestiona una situación a partir de la Fig. No.3 [12, p. 141], del mismo contenido programático de la situación anterior, y consiste en hacer un reporte del siniestro ilustrado en dicha figura, que contenga los siguientes aspectos.

--Una descripción escrita de lo que ilustra la figura.

--Una explicación argumentada y completa de lo sucedido que incluya modelos tabulares, gráficos y simbólicos.

--Un listado y explicación de usos, usuarios y destinatarios del contenido de este reporte.

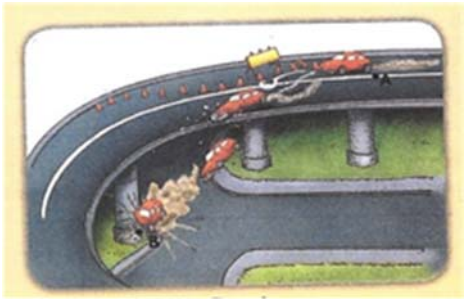


Fig. 3. Ilustración del siniestro

Esta situación está en proceso de gestión, por esta razón no se reportan procesos y resultados.

VI. CONCLUSIONES

Las diversas explicaciones y evidencias incluidas en este artículo, dan cuenta de la problemática en este campo y conforman una primera base de orientación, para rediseñar el discurso matemático escolar. En términos de una práctica de modelación, en el ámbito de lectura y construcción de gráficas. Por su parte el taller realizado con 20 profesores de educación secundaria de Acapulco, Gro. donde los participantes trabajan de manera colaborativa al intercambiar saberes y experiencias sobre la Socioepistemología, fundamento de las prácticas sociales en general y en particular de la modelación, constata la disposición de los docentes para reflexionar sobre su labor y transformarla en bien de la educación de los alumnos. Las situaciones de aprendizaje como práctica de modelación, desarrolladas por estos profesores y sus alumnos, son una prueba.

Consideramos que concebir e implementar un modelo didáctico basado en la socioepistemología, posición emergente construida por profesores e investigadores de y para américa Latina, es un aporte. Como también lo es la creación de ambientes de aprendizaje asociados a la modelación, por parte de alumnos y profesores. Donde cada quién reconoce y respeta sus atribuciones, sin ninguna imposición y en favor de la construcción social de saberes, donde los participantes valoran su trabajo y su crecimiento como comunidad de estudio.

REFERENCIAS

[1] Córdoba, F.: La modelación en Matemática Educativa. Una práctica para el trabajo de aula en ingeniería. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, (2011).

[2] Suárez, L. ; Cordero, F.: Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 13, No. 4, pp. 319-333 (2010).

[3] Boyer, C.: *Historia de la matemática*. Alianza Editorial (1986).

[4]Tonda, J.: *El matemático que defendió su ciudad: Arquímedes*. SEP/Pangea Editores (2003).

[5]Cantoral, R.: *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa Editoral (2013).

[6] Secretaría de Educación Pública.: Programas de estudio 2011 guía para el maestro. México: Autor (2011).

[7] McCombos, B. ; Whisler, J.: *La clase y la escuela centradas en el aprendiz*. Paidos (2000).

[8] Cordero, F. y Flores, R.: El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 10, No. 1, pp. 7-38 (2007).

[9] Muñoz, G.: Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 13, No. 4, pp. 283-302 (2010).

[10] Dolores, C.: Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol.10, No. 1, pp. 69-95 (2007).

[11] Torres, A.: (2004).: La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, (2004).

[12] Xique, J.C. ; Barrientos, A.L. ; Sánchez, J.L.: *Matemáticas tercer grado secundaria*. Larousse (2014).

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Un acercamiento para identificar los niveles de Van Hiele en futuros docentes.

Luz María Cruz Ahumada, De Gante Nieves Miriam y Marleny Hernández

Escuela Normal Superior de México, Licenciatura en educación secundaria, Especialidad en matemáticas, Av. Manuel Salazar 201, colonia ExHacienda el Rosario, Azcapotzalco, Ciudad de México, México.
arq.ahumada@hotmail.com , miriam.11.noemi@gmail.com, marlenylesly@hotmail.com

***Resumen*- El propósito de este artículo es usar el modelo de Van Hiele para observar donde se ubican algunos futuros docentes de la Escuela Normal Superior de México dentro de los niveles de razonamiento de dicho modelo, ya que estos niveles en investigaciones recientes representan la base para la enseñanza en temas de análisis matemático con un alto potencial visual. Esto se llevó a cabo, a partir de una serie de actividades que elaboramos con temas de geometría donde se ven reflejadas las fases que el modelo propone.**

***Palabras Clave*- enseñanza, futuros docentes, investigación, modelo de Van Hiele**

Abstract- The purpose of this article is to use the model of Van Hiele to see where some future teachers from the Escuela Normal Superior de Mexico within levels of reasoning of this model are located since these levels in recent research represent the basis for teaching topics of mathematical analysis with high visual potential. This was carried out, from a series of activities that we produce with themes of geometry where the phases the model proposed are reflected.

***Keywords* - education, future teachers, research, Van Hiele model.**

I.INTRODUCCIÓN

Entendemos a la geometría como uno de los temas de Matemáticas más importantes para el desarrollo de la humanidad, así como para la evolución de las futuras generaciones de forma directa o indirecta, con diversas actividades.

Por ello surge la interrogante de por qué es importante estudiar geometría, podemos dar múltiples respuestas a esta pregunta, pero la realidad nos lleva a reflexionar sobre como inició la geometría y en cómo el ser humano se relaciona con la percepción de las formas, el espacio que lo rodea y la necesidad de entender y transformar el mundo en el que está sumergido. La geometría es para el humano un idioma universal que permite describir y justificar su mundo.

Con la revisión de literatura encontramos un modelo que refiere o tiene tres componentes principales para la geometría:

en primer lugar, el insight, que Van Hiele (2007) define como *comprensión*, otro componente son cinco niveles en el

modelo que se clasifican: nivel 0, visualización o reconocimiento; nivel 1, análisis; nivel 2, ordenación o clasificación; nivel 3, deducción formal; nivel 4. Y por último, también se encuentran las fases de aprendizaje, que son: fase 1, información; fase 2, orientación dirigida; fase 3, explicitación; fase 4, libre orientación; fase 5, integración.

En esta investigación se desarrollaron diversas actividades donde se mostró a los futuros docentes figuras geométricas, con el objetivo de identificar en qué nivel se ubican según el modelo Van Hiele.

II. UN MODELO EDUCATIVO VAN HIELE

Los futuros docentes deben tener una amplia base de concomimientos de la geometría, para poder así guiar con mejor facilidad y éxito a sus alumnos, por lo que el docente tiene la obligación de ser el primero en conocer y explotar los diferentes criterios y conexiones de la geometría.

De esta manera en la tabla I se pueden observar las características de los niveles, en primer lugar se habla de una secuencia, para lo cual se debe pasar por los niveles en un orden, así como el llevar un progreso de un nivel a otro pero algunos métodos pueden favorecen o retrasar el manejo de los niveles. Los objetos que son inherentes a un nivel se convierten en los objetos de estudio del nivel siguiente, lo que vemos como elementos implícitos en un nivel en el siguiente se vuelven explícitos.

A continuación se presentan 4 niveles de los 5 niveles que existen el modelo ya que son los que se encontraron en la investigación sin descartar que existe el nivel 5.

Nivel 0 Visualización o reconocimiento. El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. No es capaz de reconocer y explicar las propiedades determinantes de la figura.

Nivel 1 Análisis. El individuo puede ya reconocer y

Tabla I Características de niveles

	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos
Nivel 0	Figuras y objetos Partes y propiedades de	Partes y propiedades del as figuras y objetos Implicaciones entre
Nivel 1	las figuras y objetos.	propiedades de figuras y objetos.
Nivel 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos.	Deducción formal de teoremas
Nivel 3	Deducción formal de teoremas	Relación entro los teoremas(sistemas axiomáticos)

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones entre propiedades de distintas familias de figuras.

Nivel 2 Ordenación o clasificación. El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas.

Nivel 3 Deducción formal. En este nivel ya el individuo realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.

En cada nivel existen cinco fases de aprendizaje, que son etapas en la graduación y organización de las actividades para poder continuar al siguiente nivel.EcuRed (2016).

Por ello la serie de actividades realizada solo se centra en la fase cuatro y cinco del modelo.

Primera Fase Preguntas/Información. Está fase es oral y mediante las preguntas

Segunda Fase Orientación dirigida. Aquí es donde la importancia de la capacidad didáctica

Tercera Fase Explicación (explicitación) Es una fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre alumnos/as

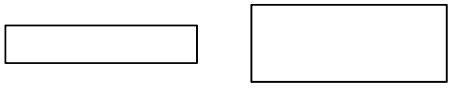
Cuarta Fase Orientación libre. Aparecen actividades más complejas fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos, para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser de varias respuestas válidas conforme a la interpretación del enunciado. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más potente.

Quinta Fase Integración. La primera idea importante es que, en esta fase, no se trabajan contenidos nuevos sino que sólo se sintetizan los ya trabajados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía.

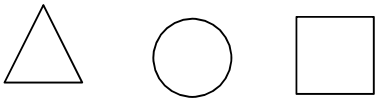
III. DISEÑO DE ACTIVIDADES

Para el diseño de las actividades que se presentaron a los futuros docentes se tomaron en cuenta diferentes figuras geométricas, lo cual permitió describir y realizar comparaciones y combinaciones de cosas que ya conocían.

Como primera pregunta se les cuestionó acerca de las características de dos rectángulos.

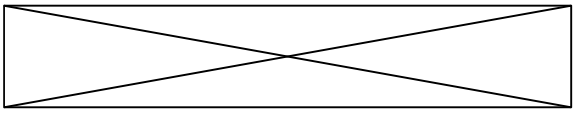


El objetivo de la segunda pregunta fue encontrar diferencias entre tres figuras, completamente diferentes, sin que se mencionaran solo los lados o redondez de estas.



En el siguiente punto, se colocó un rectángulo y un cuadrado, el propósito de esta cuestión era saber si encontraban similitudes o diferencias entre cuadriláteros, donde se pueden mencionar más características, además de sus ángulos y lados, para verlos como la misma familia con ciertas propiedades.

Por último requeríamos la relación de un rectángulo con sus diagonales, solicitando la justificación de las respuestas dadas.



IV. RESULTADOS

Con respecto a la primera pregunta se observó que el 85% de los futuros docentes empiezan a generalizar, señalando que se tiene una determinada propiedad matemática. Se reconocieron y analizaron las partes y propiedades particulares de cada una de las figuras geométricas, así como el reconocimiento a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones entre propiedades de distintas familias.

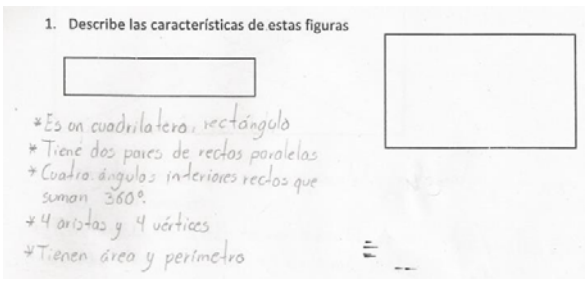
En el segundo cuestionamiento no se cumplió con el objetivo de la pregunta ya que un 95% de los futuros profesores, se guiaron de manera global, no fueron capaces de generalizar las características de las figuras.

En esta respuesta hemos encontrado que un 90% de los futuros docentes contestaron solo partes visuales de cada figura, llegando a relacionar unas propiedades con otras, sin embargo los futuros profesores se dan cuenta de que están formadas por elementos y de que son portadoras de ciertas propiedades.

En la última pregunta no se logró la respuesta esperada por los futuros docentes, aunque el 50% reconocen que son ángulos opuestos por el vértice, pero no logran hacer la demostración a su respuesta, así como no llegan a describir una figura de manera formal.

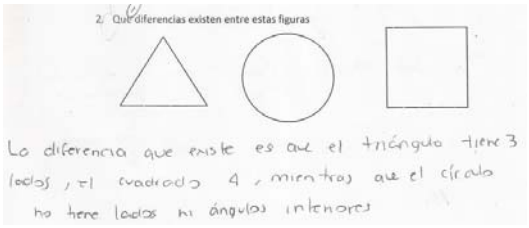
IV. CONCLUSIONES

Se logró identificar a los futuros docentes en el nivel 2 de Ordenación o clasificación ya que seleccionan propiedades que caracterizan a las figuras geométricas, así como la clasificación de cada una.



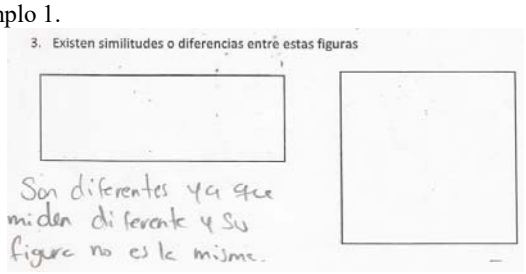
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Toman en cuenta aspectos básicos de las figuras sin detallar.

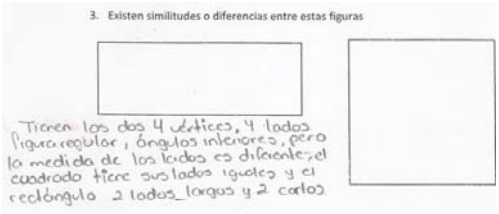


Responden según lo que ven.

Ejemplo 1.

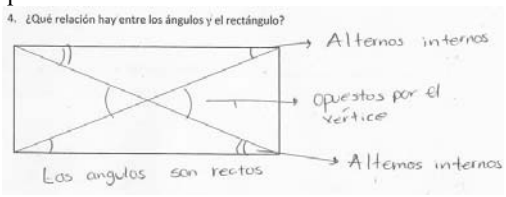


Ejemplo 2.

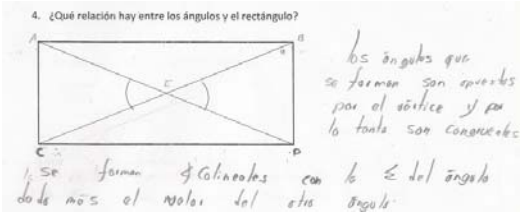


Identifican las partes internas de un rectángulo.

Ejemplo 1.

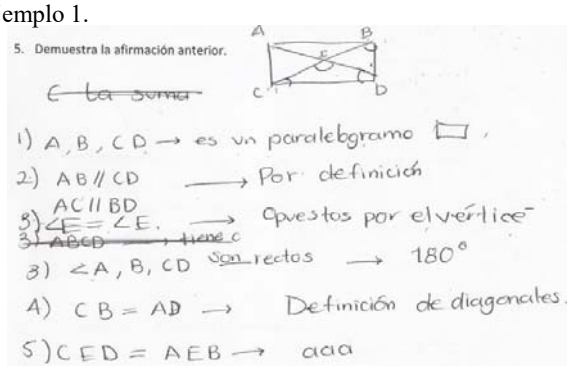


Ejemplo 2

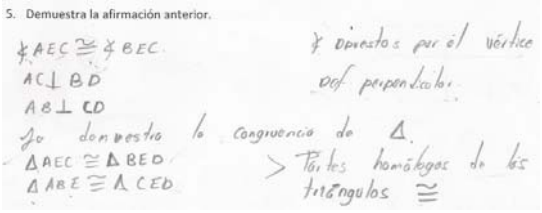


Y de acuerdo con lo anterior, no establecen relaciones entre redes de teoremas.

Ejemplo 1.



Ejemplo 2.



REFERENCIAS

[1] El modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. (2013). Recuperado de www.revistas.una.ac.cr/uniciencia

[2] Jorge Alberto Bedoya Beltrán, Pedro Vicente Esteban Medellín, Edison Darío Vasco Agudelo (2007). Fases de aprendizaje del modelo educativo de Van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local

[3] Modelo Van Hiele (2016). Recuperado de http://www.ecured.cu/Modelo_de_Van_Hiele#Enunciado_del_Modelo

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Dificultades en la resolución de problemas matemáticos en adolescentes

Yair Hernández Ruiz[#]
[#]Licenciatura en Ciencias de la Educación, Centro Universitario Casandoo, Oaxaca de Juarez, México.
yahirhernandezruiz@gmail.com

***Resumen*- El término resolución de problemas se define como un aprendizaje que ha de realizarse a lo largo de la vida, contribuye a desarrollar en los niños y las niñas estrategias mentales básicas que les facilita resolver situaciones de la vida real, aplicando los conocimientos que se han adquirido (Calvo, 2008, p. 128). Su estudio permite que los alumnos construyan sus propios caminos de razonamiento y sus propias estrategias de resolución. Por lo anterior esta investigación tiene como objetivo determinar cuáles son las dificultades en la resolución de problemas matemáticos que presentan los adolescentes de bachillerato de la ciudad de Oaxaca. De esta forma se pretende lograr la formación de las competencias matemáticas, que son una tarea educativa importante en el desarrollo de los adolescentes y lograr durante su proceso de enseñanza-aprendizaje el seguimiento que les permita entender de forma más clara los conceptos abordados.**

***Palabras Clave*- Dificultades, Matemáticas, Resolución de problemas.**

***Abstrac*- The term problem solving is defined as a learning to be performed throughout life, it contibutes to develop boys and girls basic mental strategies that helps them solve real-life situations, using skills that have bee acquired (Calvo, 2008, p. 128). Its study in important because it allows studentes to buil their own ways of thinking, their own strategies for resolution. Therefore this project aims to determine which are the dificultties in solving mathematical problems that present a high school adolescents in the city of Oaxaca. This way is intented to bring about the formation of the mathematical skills, which are an important educational task in the adolescents'development and to achieve during their teaching-learning process monitoring that allows them to understand more clearly the concepts addressed.**

***Keywords*-Dificultties, Mathematicians, Resolving problems.**

I. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas se ha abordado en diferentes momentos, sin embargo no se ha logrado que los alumnos sean competentes en este contenido matemático aplicando estrategias generales y específicas que les permita poner resolver el problema concreto, al respecto se encuentra pendiente encontrar las dificultades por las cuales el alumno no es capaz de resolver un problema matemático de manera eficiente.

Esta investigación puede aportar estrategias que implementen jóvenes y docentes durante su proceso de enseñanza-aprendizaje en la resolución de problemas. El desarrollo de estudios como el que aquí se presenta puede facilitar el descubrir las razones por las que no se lleva a cabo la adquisición de estos conocimientos y que no se desarrollen las habilidades suficientes para hacer de este aprendizaje algo sencillo. De la misma manera el estudio es importante porque propone una metodología novedosa ya que se pretende explorar la razón por la que los jóvenes tienen un rendimiento bajo en esta área; así como también cuáles son las estrategias y los beneficios. Este estudio también elimina una laguna de conocimiento ya que sólo se han realizado estudios sobre las estrategias didácticas utilizadas para una mayor comprensión del tema y la metodología utilizada.

II. DESARROLLO

Dentro del espacio escolar se observa que a menudo la enseñanza de los conceptos de las matemáticas es un proceso complejo. Por ello, el profesor puede encontrar muchas dificultades, y debe, por tanto, analizar por sí mismo las características de cada idea o concepto que el alumno debe comprender antes de aprenderla.

La resolución de problemas resulta ser una de las problemáticas que en estos últimos tiempos está siendo abordada con gran interés y preocupación por la investigación educativa, por esta razón precisa, es que se debe considerar el aprendizaje como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones con base en un proceso creativo y generativo. La enseñanza desde esta perspectiva pretende poner el acento en actividades que plantean situaciones problemáticas cuya resolución requiere analizar, descubrir, elaborar hipótesis, confrontar, reflexionar, argumentar y comunicar ideas [1].

De manera sintética se puede decir que la resolución de problemas se define como: uno de los ingredientes de la enseñanza que facilitará la consolidación de conceptos, técnicas y actitudes [2]; es un intento de relacionar un aspecto de una situación problemática con otro, intento que tiene

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

como resultado una comprensión estructural [3]; aprendizaje que ha de realizarse a lo largo de la vida, contribuye a desarrollar en los niños y las niñas estrategias mentales básicas que les facilita resolver situaciones de la vida real [4]; el término resolución de problemas como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva [4]; es un intento de relacionar un aspecto de una situación problemática con otro, obteniendo como respuesta una comprensión de la estructura, que implica reorganizar los elementos de la situación problemática de forma tal que resuelva el problema.

La resolución de problemas en general y los modelos a seguir para facilitar el proceso de solución, ha sido un tema investigado, tanto por parte de matemáticos como de psicólogos. Desde el punto de vista de la psicología, diversas han sido las aportaciones significativas a la resolución de problemas, pero no todas resaltan y por tanto, se muestran solo algunos de ellos, en cuanto al punto de vista matemático también existen grandes aportaciones de diversos autores que de la misma manera son muestra y guía para determinados fines, ambos están basados en un enfoque con un buen procedimiento que permite al educando hacer uso de él ayudando a desarrollar la habilidad cognitiva de encontrar las distintas formas de resolución.

Entre los modelos propuestos por matemáticos destaca el de POLYA, que ha inspirado o ha sido utilizado en multitud de estudios e investigaciones. Este modelo consta de cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan y determinar la relación entre los datos y la incógnita, así como considerar problemas auxiliares, 3) Obtener un plan de solución. 4) Ejecución del plan y la examinación de la solución obtenida.

El modelo de Polya se basa en la idea de que al resolver un problema, se avanza linealmente desde el enunciado hasta hallar la solución sabiendo en todo momento qué hace y, por qué lo hace, y que, para acabar, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia donde le conduce [5].

Dentro de la perspectiva psicológica se encuentra a DEWEY, psicólogo y pedagogo funcionalista, que presentó, a finales del siglo pasado, un modelo para resolver problemas con seis fases:1) Identificación de la situación problemática, 2) Definición precisa del problema, 3) Análisis medios-fines. Plan de solución, 4) Ejecución del plan, 5) Asunción de las consecuencias, 6) Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización. En este modelo, enfocado hacia problemas en general, se puede encontrar una secuencia que se va a repetir sin cambios significativos.

Para lograr un ambiente de aprendizaje basado en competencias de resolución de problemas matemáticos es necesario que se favorezca el desarrollo integro de los alumnos y que les permita responder a las demandas de su preparación como estudiantes; así como su desarrollo en el contexto social, considerando que se involucran diferentes elementos y que estructuran un sistema completo para la resolución de problemas, permitiendo las posibilidades de formar estudiantes capaces de interrelacionar situaciones con datos estandarizados que se planteen, por ello, se puede mencionar que existen "las variables sociales, culturales y lingüísticas, como equidad de género o respeto a la diversidad que deben ser atendidas con base en estrategias didácticas para un mejor sustento a las situaciones de aprendizaje" [6].

El estudio de la resolución de problemas cobra importancia debido a que es, pues, una forma de aprendizaje significativo en la que las condiciones del problema y los objetivos deseados se interrelacionan en la estructura cognoscitiva existente [7].

La Secretaria de Educación Pública [8] resalta que la importancia de las matemáticas radica en que "permite que los alumnos construyan sus propios caminos de razonamiento, sus propias estrategias de resolución y, sobre todo, la importancia de que puedan explicitar el porqué de esa resolución" ante esto cabe mencionar que "el proceso de resolución, como se ha descrito, es un medio para desarrollar el razonamiento matemático y una actitud positiva hacia las matemáticas, al mismo tiempo que se ponen en juego los conceptos que interesa afianzar".

Es conveniente agregar que el profesor (a) desempeña un papel importante en el aprendizaje de estrategias generales de resolución de problemas. "Actúa como mediador, éste mediante el diálogo y el diseño de diferentes ayudas pedagógicas modela el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas" [9]. Por tanto, el papel del docente es de suma importancia debido a que los alumnos lo ven como un apoyo en su aprendizaje y con ello se entabla la interacción entre el alumno y el docente, es decir, funciona como estrategia para llevar a cabo una mejor labor del proceso enseñanza-aprendizaje.

Básicamente "el profesor ha de desempeñar tres funciones en la enseñanza de estrategias de resolución de problemas", principalmente " a) Ha de facilitar el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas, bien con su

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

instrucción directa o bien con el diseño de los materiales didácticos adecuados, b) Ha de ser un modelo de pensamiento para sus estudiantes", de igual manera éstas funciones actúan de una forma indirecta como tal se menciona "c) Ha de ser un monitor externo del proceso de aprendizaje de los estudiantes, aportando, en un primer momento, determinadas actuaciones cognitivas y en un segundo momento, retirar gradualmente a medida que el estudiante lo utilice de manera autónoma" [9].

Por otra parte, la formación de las competencias matemáticas son una tarea educativa de mucha importancia en el desarrollo de los adolescentes porque se involucran distintos procesos donde se favorece una formación intelectual, de la misma forma existen diferentes componentes que hacen de esta tarea educativa algo más completo, cabe mencionar que la resolución de problemas matemáticos es una área muy importante que se debe de desarrollar en el alumnado debido a que los variados procesos que se presentan al enfrentar situaciones en la vida cotidiana donde no precisamente se trata de un problema simulado.

Mientras que Mayer [3] utiliza indistintamente, a lo largo de su estudio, los términos pensamiento, cognición y resolución de problemas sobre la base de la siguiente caracterización: (a) el pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta. Ocurre internamente y debe ser inferido indirectamente, (b) el pensamiento es un proceso que implica alguna manipulación de, o establece un conjunto de operaciones sobre, el conocimiento en el sistema cognitivo, (c) el pensamiento es dirigido y tiene como resultado la "resolución" de problemas o se dirige hacia la solución.

Se puede decir que el proceso que se maneja ante la situación de la resolución de problemas no ha sido tan eficiente y la forma de aplicación no ha sido la correcta debido a que se desconocen algunas de las causas principales que intervienen en el desempeño del alumno. En el proceso cognitivo, es importante aprender a desarrollar un nivel de madurez de acuerdo a la cognición de los alumnos mediante estrategias, considerando que no solo se trata de manipular un pensamiento rígido y abstracto sino más bien un pensamiento capaz de razonar de una forma lógica ante la situación que se presente mostrando el nivel de comprensión para obtener un resultado concreto.

Para un mejor análisis, Charles y Lester [7] clasificaron los problemas en: (a) problemas estándar (de palabras o historia), los cuales requieren que el sujeto transforme las afirmaciones verbales en un modelo matemático; (b) problemas no estándar (de búsqueda abierta), que fomentan el uso de métodos flexibles, ya que el resolutor no posee procedimientos rutinarios para encontrar una respuesta; (c) problemas de la vida real, que implican situaciones donde los estudiantes necesitan seleccionar y aplicar las herramientas matemáticas a su discreción; y (d) puzzles, cuya resolución depende de la suerte, la adivinación o el uso de estrategias inusuales.

Otro aspecto importante de la resolución de problemas matemáticos en los adolescentes, radica en que: a) todo problema matemático debe representar una dificultad intelectual y no sólo operacional o algorítmica. Debe significar un real desafió para los estudiantes, b) todo problema debe ser en sí mismo, un objeto de interés. Por tanto, debe ser motivante y contextual, c) debe tener multiformas de solución, es decir, puede estar sujeto a conocimientos previos, experiencias o se pueden resolver mediante la utilización de textos o personas capacitadas, d) puede estar adscrito a un objeto matemático o real, o simplemente a la combinación de ambos, e) debe establecerse en la idea de posibles soluciones mediante diferentes métodos, con exigencias e interrogantes relacionales, f) deben tener una dificultad no tan sólo algorítmica, sino también del desarrollo de habilidades cognitivas, g) se debe dar en una variedad de contextos, en distintas formas de representación de la información y en lo posible que sean resueltos por más de un modelo matemático [9].

Añadiendo a lo anterior, Jitendra y otros [10] mencionan que solucionar un problema matemático planteado verbalmente implica poner en juego varios recursos cognitivos: como comprender las sutilezas del lenguaje; identificar los hechos y datos sustanciales del problema; traducir el problema usando la información relevante para una representación mental adecuada; elaborar y monitorear un plan de solución y llevar a cabo los cálculos adecuados.

Vigotsky [10] por su parte, señala que la solución de problemas matemáticos verbales, al igual que en otras situaciones complejas de aprendizaje, el alumno enfrenta información abundante y variada que, además, es rica en elementos distractores. Ante estas condiciones, se suele echar mano de esquemas, modelos o formatos que permiten identificar lo esencial, ordenar y hacer más manejable la información. Este recurso de aprendizaje fue planteado por Vigotsky desde la primera mitad del siglo XX.

Por otra parte se plantea que la resolución de problemas matemáticos llevan al alumno a "un proceso interno de pensamiento que es influenciado por la emoción, la motivación, el lenguaje y las estrategias cognoscitivas que son empleadas" también es importante resaltar que

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

"generalmente, esta actividad es mediada por un experto(a) o docente que se debe poseer conocimiento suficiente sobre el contenido a enseñar, saber cómo enseñarlo y además considerar los aspectos emocionales y motivacionales presentes durante el proceso resolutor" [11].

Es conveniente agregar que la resolución de problemas ha cobrado gran importancia en la enseñanza de la matemática. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones áulicas es utilizada como una forma de aplicar un contenido aprendido y no como una herramienta para dotar de sentido a los conocimientos.

Existen estudios que aluden a que una de las áreas de la matemática que mayor dificultad adquiere para los estudiantes es la resolución de problemas; los niños y las niñas son capaces de resolver mecánicamente las operaciones fundamentales básicas (suma, resta, multiplicación y división), pero no saben cómo aplicarlas para la solución de un problema, ya que sólo se les ha enseñado a actuar de forma mecánica y repetitiva [4].

Asimismo se considera que para enseñar la resolución de problemas en matemática se debe aplicar una metodología que ayude al estudiante a hallar la solución correcta de una manera comprensiva; para lograr esto es importante reconocer aspectos referentes al papel del docente y del alumno en este proceso, así como la influencia que tiene la actitud que muestren ambos sujetos [4].

Existen investigaciones que se han realizado para el análisis de esta problemática se pueden encontrar estudios en la resolución de problemas matemáticos en los que destaca Sánchez [4] quien realizó una investigación sobre la resolución de problemas matemáticos con alumnos de sexto grado de educación primaria, cuyo objetivo principal fue conocer y comprender la relación que existe entre las dificultades para la resolución de problemas matemáticos presentes en los alumnos de sexto grado y la forma en cómo les enseñaron las matemáticas en los grados anteriores, y así es posible estar en condiciones de establecer correlaciones entre ambos aspectos. De acuerdo a los resultados se evidencia que la presencia de dificultades se debe a que no se tomó en cuenta durante su enseñanza, la maduración psicogenética, se ha olvidado, ignorado o desconocido que la concepción y comprensión por parte del estudiante de los contenidos matemáticos están en relación con el nivel de desarrollo en que se encuentre. Según la investigadora, no se da un seguimiento lógico y continúo entre los elementos del proceso de enseñanza, en múltiples ocasiones se empieza por lo último, es decir, la ejercitación de mecanizaciones para luego aplicarlas a la resolución de problemas.

Terán y otros [4] desarrollaron "La investigación-acción en el aula: tendencias y propuestas para la enseñanza de la matemática en sexto grado". Esta investigación tuvo como propósito determinar la aplicabilidad de un conjunto de estrategias constructivistas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en sexto grado de la educación básica. Se utilizó como metodología la investigación-acción participativa, que implicó un trabajo de campo caracterizado por la observación y participación intensiva a largo plazo en una unidad educativa del estado de Trujillo. Se seleccionaron como categorías de análisis: la práctica pedagógica desarrollada por la maestra y el trabajo cooperativo. En el alumnado permitió: desarrollar actitudes positivas tendentes a mejorar el aprendizaje de la matemática, formular, proponer e inventar nuevos problemas matemáticos, desarrollar un pensamiento crítico, crear y recrear el conocimiento matemático. De igual manera, se logró desarrollar en los niños y las niñas habilidades para el trabajo independiente y autónomo en la realización de actividades y consolidación de valores para la convivencia.

III. CONCLUSIONES

De manera general en los estudios se puede observar que la resolución de problemas matemáticos ha sido analizada desde diversos puntos de vista y en diferentes periodos englobando las principales dificultades de esta temática. Llama la atención la forma en que ha sido abordada la matemática y resulta interesante debido a que no existe estrategias que permitan al educando comprender el concepto y dar seguimiento a la resolución de un problema; se induce a trabajar de forma mecánica y por consiguiente no se desarrollan las habilidades cognitivas que el educando necesita. Se aprecia también que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje no existe un seguimiento que permita entender de forma más clara los conceptos abordados. Además resalta el hecho que no existe estimulación sobre las habilidades que el educando ya ha desarrollado, y que pueden ser significativas en el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, hoy en día el trabajo colaborativo y las aportaciones individuales desarrollan nuevas propuestas y oportunidades que pueden aplicarse con éxito.

Sería conveniente desarrollar futuras investigaciones en las que se estudien con mayor detenimiento las estrategias relativas al desarrollo de la estructura cognitiva del educando y que le permitan desarrollar habilidades o estrategias propias de las matemáticas y la resolución de problemas.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

REFERENCIAS

[1] M. d. V. Coronel y M. Curotto, «La resolución de problemas como estrategias de enseñanza aprendizaje,» *Revista electrónica de Enseñanza de las ciencias,* vol. 7, nº 2, pp. 463-478, 2008.

[2] V. Mellado, L. J. Blanco, A. B. Borrachero y J. A. Cárdenas , *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas*, vol. 1, España: deprofe, 2012, pp. 67-87.

[3] Z. Gangoso, *Investigaciones en resolución de problemas matemáticos en ciencias*, Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba, 1999.

[4] M. M. Calvo, «Enseñanza eficaz de la resolución de problemas matemáticos,» *Revista educación,* vol. 32, nº 1, pp. 123-138, 2008.

[5] J. Domínguez y M. Robayna, «Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación de matemáticas,» *Revista I seminario sobre lenguaje y matemáticas,* pp. 82-90, 1994.

[6] Secretaria de Educación pública, «Educación Media Superior,» AUTOR, México, 2011.

[7] E. Rodríguez , *Metacognición, Resolución de problemas y Enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*, Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2005.

[8] Secretaria de Educación Pública, *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria*, México: AUTOR, 2001.

[9] X. Villalobos, «Resolución de problemas matemáticos; un cambio epistemológico con resultados metodológicos,» *Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio de educación,* vol. 6, nº 3, pp. 36-58, 2008.

[10] J. Vázquez , L. Zarzosa y V. García , «Solución estratégica a problemas matemáticos verbales de una operación. El caso de la multiplicación y división,» *Revista Educación matemática,* vol. 25, nº 3, pp. 103-128, 2013.

[11] N. A. Arzate, *Promoción de la competencia matemática en niños (as) de tercero de primaria*, México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2012.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Análisis del pensamiento lógico matemático en los alumnos del Tecnológico de Altamira

Álvaro Fabio Hernández Maldonado[1], Sandra Guadalupe Gómez Flores[1]; Guadalupe Torres González[1]; Mónica Yolanda Espinosa López[1] y Jorge Gilberto Guerrero Ruiz[1].
[1]Instituto Tecnológico de Altamira, Carretera Tampico – Mante Km. 24.5 Altamira, Tamaulipas, México.
alvarofabio@hotmail.com , sgomez_flores@hotmail.com , maestratorres@yahoo.com.mx , monica_espinosaa@hotmail.com, jorgroruiz@hotmail.com .

***Resumen*- El alumno oye la palabra matemáticas, inmediatamente la relaciona con una complicación en la vida, quien se acerca a tratar de demostrar que al alumno le beneficia aprender matemáticas es el docente. Objetivo general: "Análisis del pensamiento matemático en los alumnos de nuevo ingreso al Instituto Tecnológico de Altamira". Gardner (1983) define la inteligencia como: "La capacidad de resolver problemas o elaborar productos que sean valiosos en una o más culturas". La importancia de la definición es doble: Amplía el campo de lo que es la inteligencia y reconoce lo que todos sabíamos intuitivamente, que la brillantez académica no lo es todo. Metodología utilizada: aplicación de cuestionario de opción múltiple tipo Likert a 161 alumnos de nuevo ingreso al ciclo escolar 2013–2014. Los resultados analizados mediante un análisis de frecuencia y representados en gráficas. El alumno dice mediante esta encuesta que considera de valor el uso del pensamiento crítico.**

***Palabras Clave*- pensamiento matemático, inteligencia, aprendizaje, habilidades.**

***Keywords*- mathematical thinking, intelligence, learning, skills.**

***Abstract*- The student hears the word math, immediately related to a complication in life, who is about to try to show that the student will learn math benefit is the teacher. Overall objective: "Analysis of mathematical thinking in students new to the Technological Institute of Altamira". Gardner (1983) defines intelligence as "the ability to solve problems or make products that are valued in one or more cultures". The importance of the definition is twofold: Extends the field of what is intelligence and recognizes what we all knew intuitively that academic brilliance is not everything. Methodology used application of multiple-choice questionnaire Likert 161 new students to the 2013-2014 school year. The results analyzed using frequency analysis and represented in graphs. The student says through this survey that considers the use value of critical thinking.**

I. Introducción.

Cuando mencionamos la complejidad de la enseñanza de las matemáticas, inmediatamente pensamos en los métodos y técnicas que nos puedan apoyar como herramientas en esta tarea, analizamos el programa de la materia y sus contenidos temáticos y enlazamos la disciplina, el conocimiento y sus posibles aplicaciones con el enfoque del perfil profesional que se formará. Inmediatamente analizamos al docente, las características y la experiencia en impartir la disciplina y éste, asume su rol dentro de la docencia del plantel, formar profesionales de provecho para la planta productiva y la sociedad en sí, a través de estas actividades el Tecnológico cumple su función social y, de la calidad de la planta docente depende el prestigio del mismo, así como de la formación y desempeño de sus egresados.

A la fecha, este compromiso está siendo cumplido y las metas cubiertas son significativas, ya que factores como eficiencia terminal, titulación y lo principal colocación y ubicación de nuestros egresados en la planta productiva, está en niveles altos, por lo que el prestigio institucional se incrementa cada que egresa una generación de alumnos.

Pero aún se pueden mejorar las características de nuestros egresados y considero, que el desarrollo del pensamiento matemático lograría que estos fueran más asertivos en su toma de decisiones, además del logro y desarrollo de mejores habilidades matemáticas.

II. Antecedentes y desarrollo.

El Instituto Tecnológico de Altamira, surge en la región como Institución de Educación Superior desde 1975, como parte de una Política Educativa, dentro de la Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria, con la tarea de formar Ingenieros Agrónomos, como carrera profesional única, con un organigrama administrativo adecuado a esta función, sin embargo y atendiendo las demandas sociales de la región, se abren las carreras de Licenciado en Administración y Licenciado en Biología, recientemente se abre Ingeniería en Gestión empresarial, Ingeniería en Logística y posteriormente Ingeniería Industrial e Ingeniería en Sistemas Computacionales. Planteamiento del problema: Los alumnos de nuevo ingreso al Instituto Tecnológico de Altamira poseen un nivel bajo de conocimientos de las matemáticas. Esta problemática incide de manera negativa en la enseñanza-aprendizaje de las mismas. Para contrarrestar lo anterior, el docente de matemáticas aplica un programa conocido como "nivelación de bases". Posteriormente, el profesor aplica el nivel 1 del programa de matemáticas de la retícula correspondiente. En esta tarea, el docente utiliza técnicas y métodos a fin de motivar a los alumnos en el desarrollo del pensamiento matemático. Delimitación del problema: En el examen de diagnóstico aplicado por CENEVAL, para alumnos egresados de nivel medio superior, los resultados definidos por el EXANI II son corroborados en las aulas de clase, y éstos inciden en conocimientos escasos, someros, suponemos además de faltos de profundidad en las clases en el bachillerato, ya que, si se compara el contenido temático y el aprendizaje mostrado, éste no corresponde al exhibido por los alumnos. Además, el pensamiento

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

matemático es poco desarrollado para este nivel superior en cuanto a razones, procedimientos y formulaciones que se comparten y construyen al abordar tareas matemáticas en el aula, dentro del proceso de enseñanza y construcción de competencias. Hipótesis: Los alumnos de nuevo ingreso del Instituto Tecnológico de Altamira desconocen el papel que juega el pensamiento matemático en sus actividades diarias. Justificación: Dentro del aula de clase ocurren situaciones detectadas en el desarrollo de las actividades de aprendizaje. Una de estas es la falta de motivación de los estudiantes por aprender matemáticas, como una disciplina necesaria para el desarrollo del campo profesional elegido como vocación, y en el que aplicarán los conocimientos adquiridos en las aulas en el transcurso de su crecimiento profesional. Pero descubren la casi nula aplicación de las matemáticas en las disciplinas subsecuentes en los siguientes niveles educativos, por lo que llegan a la conclusión de que es un conocimiento innecesario para su formación profesional. Las disciplinas mejor valoradas por los alumnos son las que incrementan el conocimiento por tener una aplicación inmediata en la vida profesional. Al aportar soluciones a problemáticas sociales en el desarrollo profesional y acrecentar la posibilidad de aplicar los conocimientos aprendidos. Preguntas de investigación: ¿Cómo se desarrolla el pensamiento en el ser?, ¿Cómo se desarrolla el pensamiento matemático en la escuela?, ¿El pensamiento matemático ayuda en el desarrollo de nuestra vida? Objetivo General: Analizar el pensamiento matemático en los alumnos de nuevo ingreso al Instituto Tecnológico de Altamira. Objetivo específico: Conocer las habilidades matemáticas de los alumnos de nuevo ingreso al Instituto Tecnológico de Altamira. Marco teórico: Como el ser humano se va desarrollando a lo largo de su crecimiento, conforme al tiempo transcurrido, su pensamiento se desarrollará a la par que las demás partes de su organismo, el ser va cumpliendo etapas de desarrollo en donde demuestra habilidades en cada una, sin embargo el ser humano crece con una estructura educativa desde el hogar donde la familia y el medio la dejan huella y muchos temores e incertidumbres que se van explicando con los logros tenidos, el aprendizaje de las matemáticas es de estos logros el calificado más bajo, ya que por el grado de dificultad que le encuentra este dice, matemáticas aunque la acredite con el mínimo, pero en las demás disciplinas si tiene como objetivo acreditarlas con excelencia. Esto ocurre en algunos casos por la formación en la que el gusto por aprender matemáticas se ve reforzada por una habilidad natural la que surge espontáneamente y que la estructura educativa no logra frenar. ([3]Gardner, 1983) define la inteligencia como: "La capacidad de resolver problemas o elaborar productos que sean valiosos en una o más culturas". La importancia de la definición es doble: Primero, amplía el campo de lo que es la inteligencia y reconoce lo que todos sabíamos intuitivamente, que la brillantez académica no lo es todo. A la hora de desenvolvernos en esta vida no basta con tener un gran expediente académico, hay gente de gran capacidad intelectual pero incapaz de, por ejemplo, elegir bien a sus amigos y, por el contrario, hay gente menos brillante en la escuela que triunfa en el mundo de los negocios o en su vida personal. Triunfar en los negocios, o en los deportes, requiere ser inteligente, pero en cada campo utilizamos un tipo de inteligencia distinto. No mejor ni peor, pero si distinto. Segundo y no menos importante, ([3]Gardner, 1983)[1] define la inteligencia como una capacidad. Hasta hace muy poco tiempo la inteligencia se consideraba algo innato e inamovible. Se nacía inteligente o no, y la educación no podía cambiar ese hecho. Tanto es así que en épocas muy cercanas a los deficientes mentales no se les educaba, porque se consideraba que era un esfuerzo inútil. Al definir la inteligencia como una capacidad Gardner la convierte en una destreza que se puede desarrollar. Gardner no niega el componente genético. Howard Gardner añade que, igual que hay muchos tipos de problemas que resolver, también hay muchos tipos de inteligencia. Hasta la fecha Howard Gardner y su equipo de la Universidad de Harvard han identificado ocho tipos distintos:

- Inteligencia Lógica – Matemática
- Inteligencia Lingüística
- Inteligencia Espacial
- Inteligencia Musical
- Inteligencia Corporal - Kinestésica
- Inteligencia Interpersonal
- Inteligencia intrapersonal
- Inteligencia Emocional

Ante esto, Howard Gardner enfatiza el hecho de que todas las inteligencias son igualmente importantes. El problema es que nuestro sistema escolar no las trata por igual y ha entronizado las dos primeras de la lista, (la inteligencia lógica – matemática y la inteligencia lingüística) hasta el punto de negar la existencia de las demás. Es evidente que, sabiendo lo que sabemos sobre estilos de aprendizaje, tipos de inteligencia y estilos de enseñanza es absurdo que sigamos insistiendo en que todos nuestros alumnos aprendan de la misma manera. El sistema de enseñanza de la Ciencia descansa, en la concepción y naturaleza de lo que denominamos, conocimiento científico. Esto nos remite a una primera precisión que consideramos fundamental: el conocimiento al que nos referiremos no es uno cualquiera, lo que implica que hay otros tipos de conocimientos a los cuales no les es pertinente el esquema de enseñanza que vamos a caracterizar. Saberes, los denomina. ([2] Gallego-Badillo, 1993); Informaciones, los califica ([5]Rafael, 1994); y algunos autores de textos de metodología científica ([4]Kerlinger, 1975); ([1]Bunge, 1983), establecen tipologías que cubren desde el llamado conocimiento vulgar hasta el propiamente científico. En este sentido el conocimiento científico no está dado, no es una realidad que se descubre, como antes solía afirmarse. Es más bien una construcción del sujeto pensante, reflexivo. Lo que verdaderamente hace científico al conocimiento es su posibilidad de transformarlo, mejorarlo, sustituirlo. En la enseñanza actual pretendemos uniformar a los alumnos en el logro de los aprendizajes. Si homologamos aprendizaje a construcción de conocimientos, aquél, al igual que éste último no puede ser uniforme. Podemos concebir roles distintos para los integrantes del proceso de enseñanza según épocas y teorías, pero manteniendo el concepto de que el proceso es, en esencia, uno de transmisión. ([6]Silvio Pomenta, 1988). Se transmite cultura, conocimientos, informaciones pero siempre sobre la idea de que alguien que tiene algo se lo da a quien carece de ello. De ahí que la conceptualización se reduzca tautológicamente a la presencia de alguien que enseña y otro que es enseñado. Se han introducido mejoras considerables en la enseñanza a nivel superior como lo son los métodos de solución de problemas y de proyectos, pero sin que estos

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

esfuerzos hayan logrado cambiar o superar el tradicional divorcio entre el investigador y el docente, quedando este último caracterizado siempre como un mediador transmisor de conocimientos ajenos. La transmisión de conocimientos: El acto de enseñanza ha sido concebido siempre como uno comunicacional, es decir, un proceso en el cual alguien comunica algo a alguien. En este caso el alguien serían el profesor y el alumno. A su vez, el proceso comunicacional se ha concebido como un proceso de transmisión: un mensaje que se envía y es recibido. Como en la docencia la materia prima que se manipula es el conocimiento, se concluyó en que el proceso de enseñanza es uno en el cual el profesor transmite conocimientos a sus alumnos. Separación de roles en los actores de la vida educativa. Unos están allí para producir el conocimiento, es decir, son investigadores. Otros transfieren esos conocimientos a la comunidad extra escolar, traducidos en servicios y aplicaciones, son los extensionistas; y hay otro grupo que debe transmitir esos conocimientos, son los docentes ([6]Silvio Pomenta, 1988). Metodología**:** El trabajo fue realizado, de agosto 2013 a enero 2014, en el Instituto Tecnológico de Altamira, Tamaulipas, como se describe a continuación: se aplicó un cuestionario de opción múltiple tipo Likert a 161 alumnos de nuevo ingreso a la ingeniería en Agronomía, Biología, Logística, Gestión empresarial, Industrial y Sistemas computacionales en el ciclo escolar 2013–2014. Los resultados obtenidos fueron analizados mediante un análisis de frecuencia y representados en graficas de pastel.

¿En la toma de decisiones en un proceso, valoras el nivel de información que tienes sobre distintos aspectos del problema?

Tabla 1

	Muy alto	Alto	Medio	Bajo	Muy bajo
Estructura del pensamiento	27	45	20	4	0

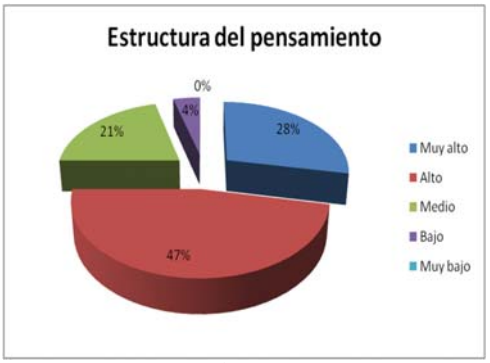


Figura 1

Al realizar la toma de decisiones en un proceso el valor que se le da a la información proporcionada el 28% de los alumnos considera como muy alto el valor de la información para la toma de decisiones en un proceso, el 47% de los alumnos considera como alto el valor que le da a la información para la toma de decisiones en un proceso y el 21% considera como medio el valor de la información para la toma de decisiones en un proceso por lo que se concluye que la estructura del pensamiento de los alumnos valora la información en la posible toma de decisiones.

¿El uso de los conocimientos adquiridos sobre matemáticas como herramienta, consideras son de aplicación inmediata?

Tabla 2

	Muy importante	Bastante importante	Medianamente importante	Poco importante	Nada importante
El uso de los conocimientos adquiridos sobre matematicas como herramienta, consideras son de aplicación inmediata:	62	31	4	0	0

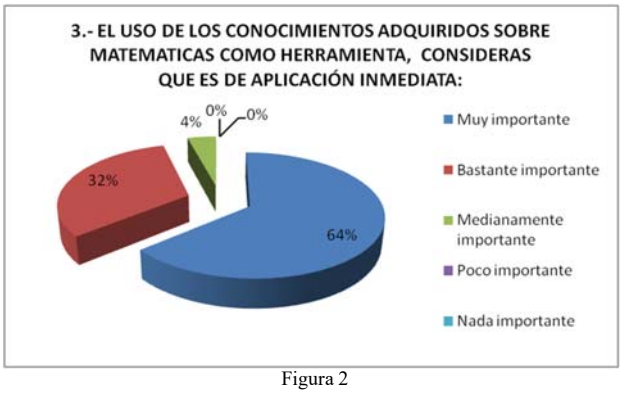


Figura 2

La mayoría de los alumnos manifiestan estar de acuerdo en la importancia del uso y aplicación de los conocimientos adquiridos de matemáticas como una herramienta en el desarrollo y aplicación de las demás ciencias un 64% valora como muy importante esta actividad un 32% lo considera bastante importante y un 4% lo considera medianamente importante, por lo que podemos afirmar que el nivel de valoración de los conocimientos es importante para el alumno.

¿Interactúas con tus compañeros en los procesos de aprendizaje de las matemáticas en los módulos que has cursado?

Tabla 3

	Totalmente de acuerdo	Bastante de acuerdo	Medianamente de acuerdo	Poco de acuerdo	Nada de acuerdo
4.- INTERACTUAS CON TUS COMPAÑEROS EN LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS EN LOS MODULOS QUE HAS CURSADO.	51	29	13	1	0

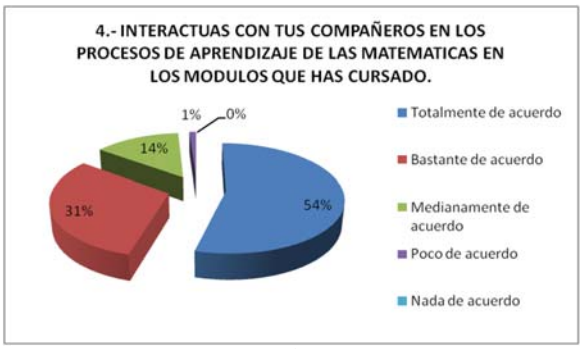


Figura 3

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Dentro de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en los módulos cursados la mayoría de los alumnos está de acuerdo en interactuar dentro de los procesos de aprendizaje de las matemáticas y el 54% de los alumnos está totalmente de acuerdo en la importancia de interactuar al aprender matemáticas, el 31% está bastante de acuerdo en interactuar durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas el 14% esta medianamente de acuerdo en interactuar, podemos afirmar que los procesos de aprendizaje de las matemáticas están basados en poder interactuar en actividades colaborativas

¿Tu percepción acerca de la impartición de clases de los docentes del área de matemáticas sobre el uso de técnicas, métodos y equipos innovadores para reforzar el proceso educativo es?

Tabla 4

	Muy alto	Alto	Medio	Bajo	Muy bajo
Uso de blog educativo	7	21	29	10	5

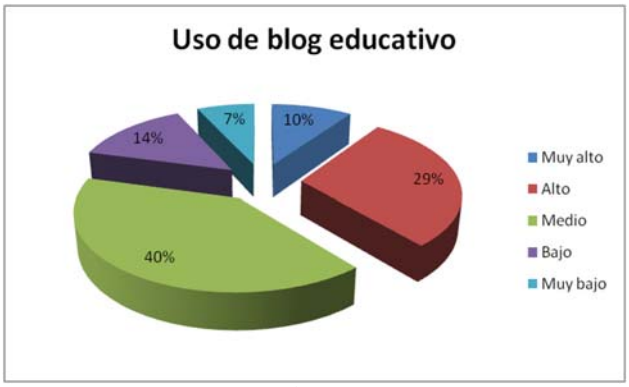


Figura 4

La percepción de los alumnos en la docencia de las matemáticas al cuestionar el uso de técnicas y métodos de enseñanza de las matemáticas específicamente del blog educativo como apoyo didáctico, 10% lo valora como muy alto su uso, 29% lo valora como alto y 40% lo valora como medio y el 21% restante como bajo el uso, el uso de este apoyo permite mantener un contacto a distancia con el alumno en el desarrollo de las materias y actividades extra clase.

¿Uso de software educativo de apoyo?

Tabla 5

	Muy alto	Alto	Medio	Bajo	Muy bajo
Uso de software educativo de apoyo	22	27	29	11	4

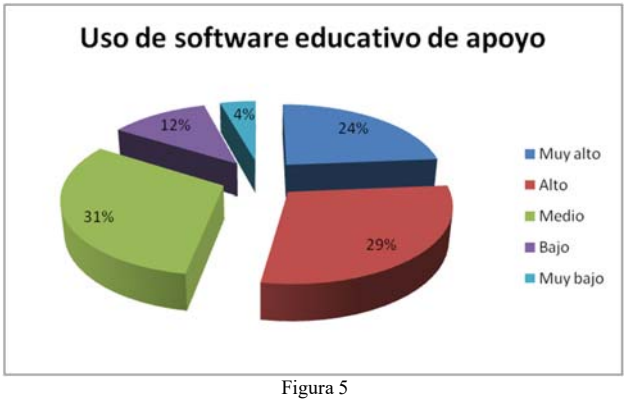


Figura 5

En las materias de matemáticas el 24% de los alumnos reconocen el uso de software educativo y de apoyo como de valor muy alto, el 29% de los alumnos lo valoran como alto el uso y el 31% lo valoran medianamente el uso de software por lo que podemos afirmar que el uso de software de apoyo en la docencia en las materias de matemáticas es reconocido como de gran apoyo.

¿Antología del curso?

Tabla 6

	Muy alto	Alto	Medio	Bajo	Muy bajo
Antología del curso	18	26	37	9	2

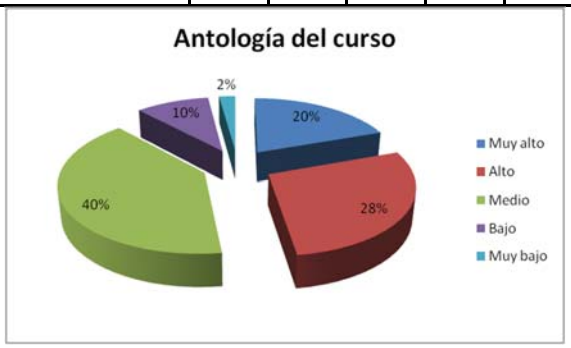


Figura 6

En cuanto al uso de antologías en los cursos de matemáticas los alumnos las consideran de un valor muy alto un 20% de ellos, el 28% consideran que su valor es alto en las materias y un 40% considera como medio el valor de las antologías en los diferentes cursos de matemáticas, la valoración que se le da al uso de las antologías y apuntes en los cursos habla del uso que el alumno considera de estos apoyos.

¿Actividades de aprendizaje por problemas?

Tabla 7

	Muy alto	Alto	Medio	Bajo	Muy bajo
Actividades de aprendizaje por problemas	26	33	23	5	4

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Figura 7

Al cuestionar a los alumnos acerca del uso de métodos didácticos de enseñanza como el aprendizaje basado en problemas un 29% reconoce que su uso es muy alto en las diferentes disciplinas de matemáticas, el 36% reconoce su uso como alto y el 25% afirma su uso como medio, lo significativo es que el alumno identifica los diferentes métodos de aprendizaje de las matemáticas.

¿Actividades de aprendizaje por análisis de casos?

Tabla 8

	Muy alto	Alto	Medio	Bajo	Muy bajo
Actividades de aprendizaje por análisis de casos	24	34	22	5	2

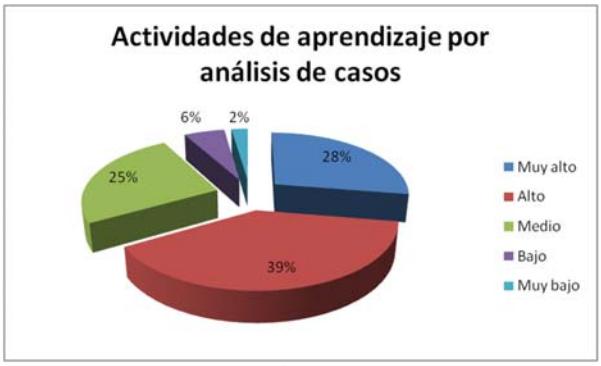


Figura 8

Al cuestionar a los alumnos acerca del desarrollo de actividades de aprendizaje por análisis de casos, este refiere que en el desarrollo de las materias de matemáticas el 28% refiere un uso muy alto de estas actividades de aprendizaje, un 39% un uso alto de estas actividades y el 25% refiere un uso medio de esta actividad.

Al analizar los resultados obtenidos mediante la aplicación del instrumento, estos reflejan que los alumnos del Instituto Tecnológico de Altamira valoran en su mayoría los parámetros más altos en las series de respuestas acerca del manejo de la información para el desarrollo de sus actividades en la vida cotidiana, también esto se repite en el saber qué información es confiable y como utilizarla para el logro de los objetivos. En lo referente a su relación con la institución este selecciona los parámetros más altos en su mayoría para dar a conocer que le interesa pertenecer a una institución solvente y bien posicionada en el ámbito educativo y se muestra orgulloso de los logros y objetivos institucionales, además al ser cuestionado como es la comunicación institucional recibida si es de calidad, clara y oportuna también la selecciona con parámetros altos en su mayoría, cuando nos referimos a las instancias de administración de la docencia manifiesta que a él le interesa la relación del director con las demás aéreas administrativas y en cuanto a los servicios ofrecidos al cliente que es él, manifiesta que son buenos, sin embargo siempre habrá la oportunidad de acrecentarlos. En la evaluación que realiza a los docentes de las diferentes materias recibidas es importante la información que nos da ya que en todas las preguntas elige en su mayoría los parámetros altos para manifestar su conformidad en la impartición de las materias y declara que se están utilizando tecnologías de actualidad además de técnicas y métodos de enseñanza actualizados ya que manifiesta conocer las actividades de enseñanza, técnicas y métodos de enseñanza así como apoyos didácticos como el blog, antologías de curso y otros además de destacar la importancia de los conocimientos matemáticos en su aplicación con las demás disciplinas y poder formar un perfil profesional más fortalecido al egresar. Puedo concluir que el alumno dice mediante esta encuesta que considera de mucho valor el uso del pensamiento crítico para la toma de decisiones principalmente y que aunque no ha logrado desarrollarlo sistemáticamente su uso se relaciona con las actividades propias de su vida cotidiana que es donde le da más aplicación.

REFERENCIAS

[1] (s.f.).Bunge, M. (1983). La ciencia, su metodo y su filosofía. Panamericana.

[2] Gallego-Badillo, R. (1993). Hacia una evaluacion de los aprendizajes en una Perspectiva constructivista. Madrid.

[3] Gardner, H. (1983). Inteligencias multiples. Paidos.

[4] Howard, G. (1983). Inteligencias multiples. Paidos.

[5] Kerlinger, F. (1975). Investigacion Pedagógica y Formación del Comportamiento. México: Interamericana.

[6] Rafael, F. O. (1994). Hacia una pedagogía del conocimiento. Bogota: Mc Graw Hill.

[7] Silvio Pomenta, J. (1988). Educación superior y desarrollo educativo en América Latína y el Caribe. México: UAZ.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Creencias que tienen los profesores de matemáticas sobre las dificultades de elaborar pruebas basadas en la resolución de problemas verbales. Caso ITM.

María Elisa Espinosa Valdés*, Rosario Díaz Nolasco*, Ruth Icela Sosa Bielma*, Flor de Azalea López Robles*, Ricardo Moroni Zuvirie González*

*Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Minatitlán, en México

elisaesva@yahoo.es, rosydinol@gmail.com, Ruth Icela Sosa Bielma, flor_azalia@hotmail.com, zugr90@gmail.com

***Resumen.*- En este estudio se presentan las creencias que tienen los profesores de matemáticas sobre la dificultad de elaborar de pruebas basadas en la resolución de problemas verbales en el Instituto Tecnológico de Minatitlán (ITM). Se utilizó una metodología descriptiva por encuesta, ya que aplicamos un cuestionario cerrado de escala de valoración diseñado por [1], aunque aquí solamente analizamos una de las preguntas y sus respuesta. La muestra formada por 26 profesores que impartieron matemáticas en el periodo agosto – diciembre de 2014 en el ITM. Después de aplicar el instrumento, con el uso del paquete estadístico SPSS 17 se analizaron las frecuencias para determinar las creencias.**

***Palabras clave*- Creencias, pruebas basadas en resolución de problemas y problemas verbales.**

***Abstract.*- This study investigates the beliefs that mathematics teachers have on developing tests based on verbal problem solving at the Instituto Tecnológico de Minatitlán (ITM). A descriptive survey methodology was used, for which a closed questionnaire was applied following the methology in assessment scales by [1], in this work one of the research questions and their responses were analyzed. The sample was formed by 26 teachers who taught mathematics in the period from August to December 2014 at the ITM.After applying the instrument, for data analysis were used the statistical package SPSS 17, the frequencies were analyzed for beliefs.**

***Keywords*- Beliefs, evidence-based problem solving and word problems.**

I. INTRODUCCIÓN

En la Educación Matemática, tanto en su práctica como en su investigación, la resolución de problemas ocupa un lugar destacado. En los nuevos currículos del Tecnológico Nacional de México (TecNM) orientan las matemáticas desde la perspectiva de la resolución de problemas. Por eso, de acuerdo con [2], pensamos que "existe una relación importante entre las creencias y los modos de resolver problemas" (p.45), lo que nos lleva a considerar la conveniencia de realizar trabajos en ese sentido y en la elaboración de los instrumento a utilizar en la evaluación con problemas verbales.

Sin embargo, creemos que la elaboración de los instrumentos para evaluar con problemas verbales es un trabajo con el que no están muy familiarizados los docentes en el Instituto Tecnológico de Minatitlán (ITM), ya que usualmente los profesores de matemáticas se concretan a utilizar solamente ejercicios en su clase.

Por otro lado pensamos que los estudiantes también presentan cierta resistencia al uso de problemas verbales en la clase sobre todo en las materias de matemáticas de los primeros semestres y más resistencia a ser evaluados con problemas y hasta se atreven a preguntar en los inicios de la asignatura ¿*Va a evaluar con problemas*?. Y algunos llegan a cambiarse de grupo por resistencia a ser evaluados con problemas verbales.

Según [3], las creencias que tienen los estudiantes acerca de la resolución de problemas son:

1.- Los problemas en matemáticas tiene una y sola una respuesta.

2.- Solamente existe un camino correcto para hallar la solución de un problema en matemáticas.

5.- Los estudiante que entienden matemáticas, pueden resolver cualquier problema que se le asigne en 5 minutos o menos (p. 359).

Como podemos ver, estas creencias aplicadas al aula nos muestra la disposición inadecuada que tiene los estudiantes ante la resolución de problemas verbales.

Analizando lo anterior podemos ver que existen trabajos sobre las creencias de los alumnos, ahora nos interesa saber las creencias de los profesores sobre la dificultad que tienen en elaborar instrumentos que nos permitan evaluar con problemas verbales, ya que creemos que estas creencias se ven reflejadas en el aula.

Para ellos nos fijamos el objetivo siguiente:

Determinar creencias que tienen los profesores de matemáticas sobre las dificultades de elaborar pruebas basadas en la resolución de problemas en el Instituto Tecnológico de Minatitlán.

Cabe aclarar que este trabajo forma parte de una investigación más amplia denominada: "Creencias sobre evaluación con problemas verbales que tienen los profesores de matemáticas del Instituto Tecnológico de Minatitlán". Por lo extenso del trabajo solamente vamos a presentar el análisis de una parte del cuestionario en este trabajo.

Para enmarcar nuestro trabajo, primero realizamos la definición de términos a usar:

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Creencias son verdades personales indiscutibles llevadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, teniendo una fuerte componente evaluativa y afectiva [4] [5].
Resolución de problemas para [6], es una actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momentos en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da como acabada la tarea.

Para nuestro caso particular hablaremos de *solución* tomando en cuenta solamente las fases de planteamiento, ejecución y resultado.

Ahora nos interesa aclarar qué entendemos por *problemas verbales*, término que se empleará con frecuencia en nuestro estudio. Para ello, seguiremos la propuesta de [7] en el sentido de que:

Todos los problemas verbales se caracterizan por tres componentes,

- La primera componente es la "puesta en escena", estableciendo la contextualización, los caracteres y la localización de la historia que tiene lugar, aunque esta componente, a menudo, no sea esencial para la solución misma del problema.
- Una componente de "información", que da los datos que necesitan para resolver el problema. A veces se da información irrelevante como señuelo para producir recelo en el resolutor inseguro.
- Una cuestión o pregunta a la que hay que encontrar respuesta.

Instrumentos de evaluación: Cuando elaboramos instrumentos de evaluación deberán estar estrechamente relacionados con las características del aprendizaje, así como considerar que los errores instrumentales tengan un efecto mínimo en los resultados, para que de este modo la evaluación refleje lo que los estudiantes han aprendido realmente [8].

Como sabemos la metodología propuesta en el TecNM y por el modelo de competencia que se encuentra vigente, la enseñanza de las matemáticas debe estar basado en la resolución de problemas y esto, como habíamos mencionado anteriormente, requiere de nuevos instrumentos de evaluación basados en la resolución de problemas, lo que ha generado una preocupación en los profesores a la hora de determinar los instrumentos que pudieran ser adecuados para ajustarse a los requerimientos del sistema. Esto implica una necesidad creciente de elaborar instrumentos de evaluación que proporcionen medidas basadas en las actuaciones que surgen en la puesta en práctica de los procesos de resolución de problemas. Por eso, muchos autores proponen que las tareas de evaluación permitan interpretar alternativas o múltiples soluciones correctas, por lo que sugieren diseñar tareas en formatos abiertos y con petición de explicación y razonamientos a las soluciones explicitadas por los estudiantes [9].

Por eso creemos que cuando se realizan los instrumentos basados en problemas verbales que permiten al estudiante diferentes tipos de representación para su resolución correcta contribuyen a darnos una visión más adecuada de las competencias del estudiante, porque puede expresar sobre papel la mayor o menor profundidad y complejidad de su pensamiento.

Por lo tanto, los instrumentos basados en resolución de problemas verbales que reúnan las características descritas anteriores cumplen con los fines de evaluación explicados en un inicio.

Cuando se trata de resolver problemas verbales, al elaborar estos instrumentos, hay que poner espacial énfasis en la redacción de los textos de los problemas ya que, como menciona Rojano [10], los factores lingüísticos provenientes del lenguaje natural afectan la traducción de un enunciado dado en este lenguaje al lenguaje algebraico, más complejo y con reglas de sintaxis muy diferentes a las del lenguaje natural. Por lo tanto los instrumentos dependen mucho de la buena redacción del texto de los problemas. Además, los contextos que son utilizados en los mismos deberán ser cercanos al entorno escolar de los estudiantes para que favorezcan la resolución de los mismos.

Son mucho y diversos los instrumentos de evaluación que se emplean en la práctica [11], nos menciona algunos de ellos:

- Instrumentos establecidos sobre tareas escritas.
- Instrumentos establecidos sobre tareas orales.
- Instrumentos establecidos sobre la observación.

En los resultados de la encuesta sobre las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación que reporta [11], se recogen, entre otros datos, los relativos a los instrumentos más adecuados utilizados por los profesores para evaluar a los alumnos. Las respuestas dadas por los profesores de matemáticas quedan clasificadas en tres categorías:

- Pruebas escritas el 58 %
- Pruebas orales el 12 %
- Observaciones el 30 % [11]

Como podemos ver todos los autores mencionados hablan acerca del uso de un examen o prueba para evaluar, pero a la vez mencionan otras actividades muy variadas de evaluación, conllevando a dedicarle más tiempo a la evaluación en el aula.

II. DESARROLLO

Este es un trabajo de tipo descriptivo, de tipo transversal y se realizó con los profesores que impartieron la materia de matemáticas en el ITM en el periodo agosto – diciembre de 2014, aplicándoles el cuestionario a los 26 profesores de los 30 que impartieron matemáticas en el semestre mencionado, pretendíamos hacer un trabajo con toda la población, pero 1 maestros por cuestiones de salud no participo, 2 no quisieron participar y la cuarta persona se le pidió no participar ya que estaba dentro del grupo de investigación.

Del cuestionario solamente tomamos para presentar aquí la pregunta relacionada con la elaboración de pruebas basadas en la resolución de problemas verbales, la justificación a por que aparece esa pregunta en el cuestionario

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

y las posibles respuestas que se presentan se pueden consultar en [1], además de la validez y fiabilidad del instrumento también se pueden consultar en la misma referencia, en la Tabla I mostramos la pregunta que fue tomada del cuestionario que aparece completo en [1]:

Tabla I
PREGUNTA Y RESPUESTAS UTILIZADAS

Al elaborar pruebas basadas en la resolución de problemas, ¿qué dificultades crees que se presentan?

Cuesta mucho trabajo y tiempo elaborar una prueba de este tipo	1 2 3 4 5
Requieren mucho tiempo para su aplicación	1 2 3 4 5
Las pruebas adecuadas proporcionan la información necesaria acerca del conocimiento matemático del estudiante	1 2 3 4 5
Dan información parcial del conocimiento matemático del estudiante	1 2 3 4 5
Deben ser complementados con otras actividades de evaluación	1 2 3 4 5

Para analizar el cuestionario utilizaremos la siguiente codificación que se le informaba a los participantes en el inicio del cuestionario:

0.- A los que no contestan nada.
1.- Total desacuerdo
2.- En desacuerdo
3.- Indiferencia
4- De acuerdo
5.- Plenamente de acuerdo

III. RESULTADOS

A continuación analizamos cada una de las respuestas con el uso del paquete estadístico SPSS, se obtuvieron las frecuencia de cada una de las respuestas estas se pueden consultar en el Anexo I :

1.- ¿Cuesta mucho trabajo y tiempo elaborar una prueba de este tipo?

- El 46.1 % de los profesores dicen que cuesta mucho trabajo y tiempo elaborarlas.
- El 26.9 % solamente dice estar en desacuerdo en que cuete trabajo y tiempo elaborarlas
- El 26.9 % no dice nada o simplemente muestra indiferencia ante el tiempo que se invierte en elaborar estas pruebas.

2.- ¿Requiere mucho tiempo para su aplicación?

- Solamente el 30.8 % están de acuerdo en que se requiere de mucho tiempo para aplicar este tipo de pruebas.
- El 30.7 % están en desacuerdo en que requieren de mucho tiempo para su aplicación
- Al 38.5 % no les interesa este aspecto o simplemente no dicen nada.

3.- ¿Las pruebas adecuadas proporcionan la información necesaria acerca del conocimiento matemático del estudiante?

- El 80.8 % están de acuerdo en que estas pruebas adecuadas proporcionan información necesaria del conocimiento matemático de los estudiantes.
- Solamente el 15.4 % no dicen nada o simplemente se muestran indiferentes.

4.- ¿Dan información parcial del conocimiento matemático de los estudiantes?

- Solamente el 34.8 % están de acuerdo en que este tipo de pruebas solamente dan información parcial de los estudiantes.
- El 30.7 % están en desacuerdo de que estas pruebas dan información parcial de los estudiantes.
- El 34.8 % no dice nada o se muestran indiferentes antes la información que proporcionan este tipo de pruebas.

5.- ¿Deben ser complementados con otras actividades de evaluación?

- El 65 % dicen estar de acuerdo en que tienen que ser completadas con otras actividades de evaluación.
- Sin embargo solamente el 7.6 % están en desacuerdo en que tienen que ser completadas con otras actividades de evaluación.
- El 23 % se muestra indiferente o simplemente no dice nada.

IV. CONCLUSIONES

La creencias más generalizada que obtenemos como resultados es que los profesores que participaron en la encuesta están de acuerdo que las dificultades para elaborar los instrumentos basados en la resolución de problemas en la evaluación es obtener una prueba adecuadas que proporcionen información necesaria acerca de los conocimientos matemáticos de los estudiantes, también creen que cuesta mucho trabajo y tiempo elaborar un instrumento de este tipo, además de tener en cuenta que estas pruebas deben de ser complementadas con otras actividades de evaluación.

Detectamos que casi el 30 % de los participantes o les es indiferente la elaboración de pruebas basadas en la resolución de problemas o simplemente no contestan nada.

Los resultados solamente son válidos para el grupo de profesores que participo en el trabajo.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

REFERENCIAS

[1] Espinosa, M.E. Tipologías de resolutores de proble
mas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial. Tesis doctoral defendida en la Universidad de Granada. (2005).

[2] Carrillo, J. (1996). Modos de resolver problemas y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudios de posibles relaciones. Universidad de Huelva

[3]Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition and sense-making in mathematics. En D. Grouws, (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan

[4] [4]Pajares, M F. (1992). Teachers beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. Review of educational research, 62, (3), pp 307 - 332.

[5 [5]Gil, F. (1999). Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas. Tesis Doctoral. Universidad de Almería.

[6] Puig, L. (1992). Elementos para la instrucción en resolución de problemas de matemáticas. Tesis doctoral. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación. Universidad de Valencia.

[7] Gerofsky, S. (1996). A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics, 16, pp. 36-45.

[8] De la Orden, A. (1997). Evaluación y Optimización Educativa. En H. Salmerón (Ed.), Evaluación Educativa, pp. 13-28. Granada: Grupo Editorial Universitario.

[9] Fernández, F (1997). Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

[10] Rojano, T. (1994). La Matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las Ciencias, 12 (1), pp. 45-55.

[11] Fernández, F. (2001). El problema de los problemas algebraicos. En Gómez y Rico (Eds.), Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática, pp. 137-148. Universidad de Granada.

[12] Rico, L., Fernández, F. y Castro, E. (1997). La práctica de la evaluación aplicada al área de las matemáticas. En H. Salmerón (Ed.). Evaluación Educativa, pp.227-244. Granada: Grupo Editorial Universitario.

ANEXO I

Cuesta mucho trabajo y tiempo elaborar una prueba de este tipo

		Frequency	Percent
Valid	0	3	11.5
	1	3	11.5
	2	4	15.4
	3	4	15.4
	4	9	34.6
	5	3	11.5
	Total	26	100.0

Requiere mucho tiempo para su aplicación

		Frequency	Percent
Valid	0	6	23.1
	1	1	3.8
	2	7	26.9
	3	4	15.4
	4	4	15.4
	5	4	15.4
	Total	26	100.0

Las pruebas adecuadas proporcionan la información necesaria acerca del conocimiento matemático del estudiante

		Frequency	Percent
Valid	0	2	7.7
	1	1	3.8
	3	2	7.7
	4	13	50.0
	5	8	30.8
	Total	26	100.0

Dan información parcial del conocimiento matemático del estudiante

		Frequency	Percent
Valid	0	8	30.8
	1	1	3.8
	2	7	26.9
	3	1	3.8
	4	8	30.8
	5	1	3.8
	Total	26	100.0

Deben ser complementados con otras actividades de evaluación

		Frequency	Percent
Valid	0	4	15.4
	1	1	3.8
	2	1	3.8
	3	3	11.5
	4	11	42.3
	5	6	23.1
	Total	26	100.0

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Análisis comparativo de pretest y postest para determinar los prerrequisitos matemáticos en un curso de Cálculo diferencial en el primer año del nivel superior

Magally Martínez Reyes, Anabelem Soberanes Martín y José Luis Castillo Mendoza*
*Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, Av. Hermenegildo Galeana No. 3, Col. Ma. Isabel, Valle de Chalco Solidaridad, Estado de México, México.
mmreyes@hotmail.com, belemsoberanes@yahoo.com.mx, jlcastm@yahoo.com.mx.

***Resumen*- En este trabajo se presentan los resultados de una exploración sobre los prerrequisitos con que cuentan los alumnos de primer año universitario y que están marcados como obligatorios en el programa de estudio de la materia de Cálculo diferencial, mediante un instrumento de evaluación validado que se aplica en dos momentos, al inicio del curso (pretest) y al final del mismo (postest), para establecer la comparación en la adquisición de estos contenidos matemáticos después de seguir una instrumentación didáctica definida, para valorar el grado de avance y competencia de los alumnos. Los resultados muestran avances en la adquisición de conceptos en aquellos casos donde cuentan con un Entorno Didáctico Interactivo Computacional (EDIC) para explorar el concepto, por lo que se verifica la efectividad de la instrumentación didáctica soportada por el uso de tecnología bajo un enfoque metodológico definido y del seguimiento mediante un instrumento válido.**

***Palabras Clave*- cálculo diferencial, entorno didáctico interactivo computacional, evaluación, requisitos matemáticos.**

***Abstract*- This paper presents the results of a test on the pre-requirements that students must have in first year of collegue, and they are mandatory in the curriculum of the subject of differential calculus, using an instrument of validated assessment, applied are presented in two moments, at the beginning of the course (pretest) and end (posttest), for comparison the acquisition of these mathematical content after following a defined didactic instrumentation, to assess the degree of progress and competence of students. The results show progress in the acquisition of concepts in cases where they have a Computer Interactive Learning Environment (EDIC) to explore the concept, so that the effectiveness of teaching instrumentation supported by the use of technology under a defined methodological approach is verified and monitoring by a valid instrument..**

***Keywords*- computer interactive differential calculus, evaluation, learning environment, mathematical requisites.**

I. Introducción

Una de las principales preocupaciones de un docente en el primer año de educación superior es conocer el grado de dominio de las bases matemáticas con que cuentan los alumnos de nuevo ingreso, para enfrentar los retos de las materias básicas de esta disciplina, que se imparten por lo general en el primer semestre de cualquier carrera universitaria. Esto con el fin de evitar que por ejemplo un curso de cálculo diferencial e integral se convierta en un curso remedial de aritmética, álgebra o geometría analítica y dejar así truncados los contenidos de la materia que le ocupa y para la cual debería cubrir el programa de la asignatura. Si bien, los modelos educativos de varias universidades marcan la necesidad de cubrir con un diagnóstico en cada materia que se imparte, la realidad es que para el profesor resulta complejo ante la carga de trabajo y el número de alumnos, por lo que contar con instrumentos de diagnóstico y evaluación ya probados y validados resulta de gran ayuda.

Así que con el fin de elevar el desempeño escolar en el nivel superior en las materias de primer año universitario de cualquier carrera se pueden considerar instrumentos de evaluación para conocer en qué medida el alumno está preparado y valorar su desempeño; para tal propósito se presenta la propuesta de análisis comparativo entre una evaluación inicial y una final realizadas en 38 alumnos durante el 2015, para investigar los prerrequisitos matemáticos para un curso de cálculo diferencial e integral en el primer año del nivel superior, específicamente en el Centro Universitario UAEM Valle de Chalco para la carrera de Ingeniería en Computación, aunque se contó con un grupo de control de la carrera de Informática Administrativa como lo marca la metodología de estudio de caso, en este trabajo sólo se enfoca a comparar los resultados al interior del grupo. Para facilitar la lectura del pretest, el estudio se ha dividido conforme a la categorización de los cuatro estratos matemáticos básicos tomados de la clasificación [1]: el aritmético, el racional, el algebraico y el funcional. Estos estratos determinan el conocimiento básico (requisitos matemáticos) que un alumno debe dominar considerando su nivel de estudios y su grado de madurez. La evaluación consta de 22 preguntas, para el análisis se asignó a cada pregunta un valor 1 (correcto), 2 (incorrecto) y 3 (no contesta); después, se contabilizó cada uno de los valores por separado para cada pregunta; luego se obtuvieron las sumas totales de cada una de las preguntas de todos los alumnos con una separación de acuerdo a los valores mencionados; y se obtuvo su porcentaje de un universo de 38 alumnos; además, se consideró contrastar los resultados entre los diferentes estratos de la evaluación. En el espacio temporal entre el pretest y el postest se refuerzan conceptos mediante el uso de Entornos Didácticos Interactivos Computacionales (EDIC) [4].

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

II. MÉTODO

El pretest consta de 22 preguntas distribuidas en los cuatro estratos: aritmético, racional, algebraico y funcional, es un instrumento que busca explorar el dominio y operatividad de conceptos básicos de cada estrato y que son necesarios para desarrollar los conceptos posteriores que marca un curso de Cálculo diferencial e integral de primer año universitario. Este instrumento ha sido elaborado por [2] y validado en su aplicación con alumnos de ese nivel desde hace 10 años [3]. La comparación entre pretest y postest resulta adecuada, ya que se utilizó el mismo instrumento de medición para ambas evaluaciones, por lo que es posible realizar el análisis comparativo. El tiempo que transcurre entre cada evaluación está determinada por la duración del curso, el pretest se aplica en la primera sesión de clase y el postest en la última clase después de 15 semanas. En las restantes 14 semanas se imparten clases de manera tradicional con los recursos usuales de pizarrón y gis, pero se alternan con el uso de Entornos Didácticos Interactivos Computacionales (EDIC) para los temas de raíces, dominio, función, derivada y máximos y mínimos, que fueron desarrollados por un grupo interdisciplinario del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav [4] y la retroalimentación de los mismos por parte del Cuerpo Académico de Cómputo Aplicado en el área de tecnología educativa [5]. Enseguida se presenta el análisis con base en la categorización.

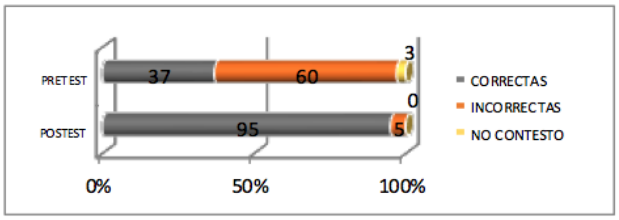
III. RESULTADOS: ANÁLISIS COMPARATIVO

A. Estrato Aritmético

Consta de 7 preguntas, como se describe a continuación.

Pregunta 1. Calcular $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=$

El pretest presenta 37% de respuestas correctas, 60% incorrectas y 3% no contesto. En comparación el postest presenta 95% correctas, 5% incorrectas y 0% no contesto, estos resultados se presentan en la gráfica 1.



Gráfica 1. Comparativo de la pregunta 1

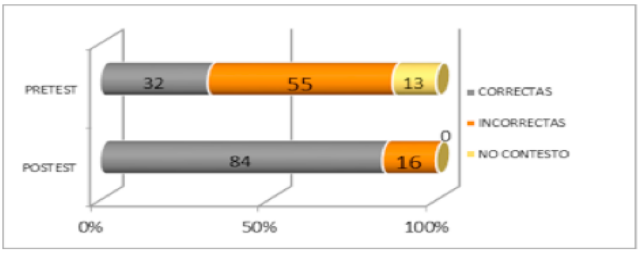
Pregunta 2. Calcular $\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=$

El pretest presenta 32% de respuestas correctas, 55% incorrectas y 13% no contesto. El postest presenta 84% de respuestas correctas, 16% incorrectas y 0% no contesto (ver gráfica 2).

Pregunta 4, ¿Cuál es el mayor de los siguientes números? 1.6; 3.5, -8.9, 0.546; -987.

El pretest presenta 84% correctas, 8% incorrectas y 8% no contesto. En comparación el postest presenta 92% correctas, 0% incorrecta y 8% no contesto.

Pregunta 5, calcular $3(5-8)+3[2(4+2)]$



Gráfica 2. Comparativo de la pregunta 2

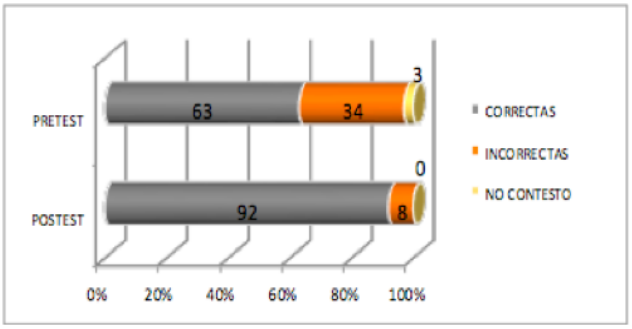
El pretest presenta 58% de respuestas correctas, 29% incorrectas y 13% no contesto. El postest presenta 95% correctas, 0% incorrecta y 5% no contesto.

Pregunta 9. ¿Cuál de las siguientes expresiones es verdadera? $8>5$; $5<3$; $1.5>1.52$; $1.52<1.52$

El pretest presenta 71% de respuestas correctas, 24% incorrectas y 5% no contesto. El postest presenta 100% correctas, 0% incorrecta y 0% no contesto.

Pregunta 10. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es verdadera? $3\leq 3;\ -3>-2;\ 4>3;\ 3<4$

La gráfica 3 muestra los resultados en donde el pretest presenta 63% de respuestas correctas, 34% incorrectas y 3% no contesto. El postest presenta 92% correctas, 8% incorrectas y 0% no contesto (ver figura 3).



Gráfica 3. Comparativo de la pregunta 10

Pregunta 15. Resuelva los siguientes incisos a partir de la siguiente información

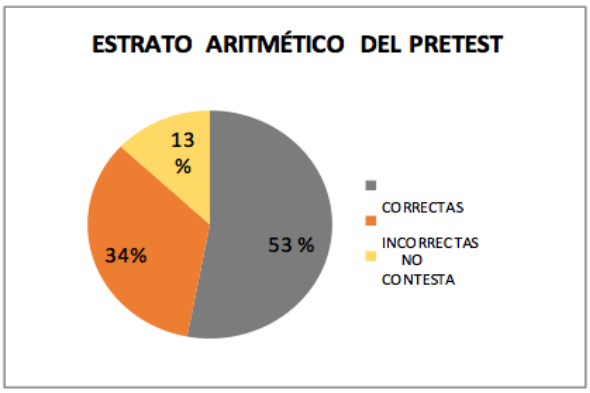
$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $A=\{2,4,6,8\}$; $B=\{1,3,5,7.9\}$; $C=\{0,1,2\}$

El pretest presenta 24% correctas, 27% incorrectas y 49% no contesto. El postest presenta 60% correctas, 33% incorrectas y 7% no contesto.

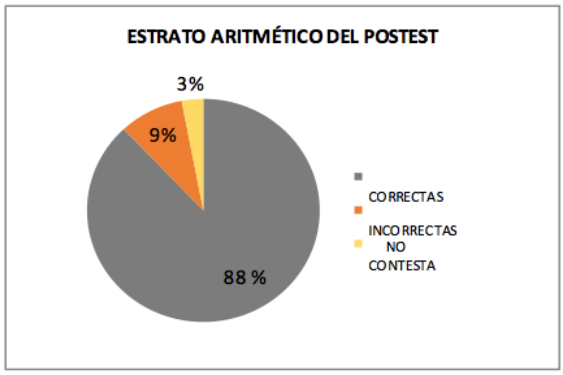
En resumen, para el esquema aritmético, en la mayor parte de las preguntas se registró un aumento del 30 a 60% en el número de respuestas correctas, salvo la pregunta 4, aumento un 8%. Con el fin de visualizar de manera esquemática los resultados del estrato aritmético entre el pretest y el postest, se presentan las gráficas 4 y 5.

Se puede distinguir una gran diferencia entre ambas evaluaciones, el número de respuestas correctas creció del 53% al 88% y en su debida proporción disminuyó el número de respuestas incorrectas del 34% al 9%.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org



Gráfica 4. Concentrado del pretest



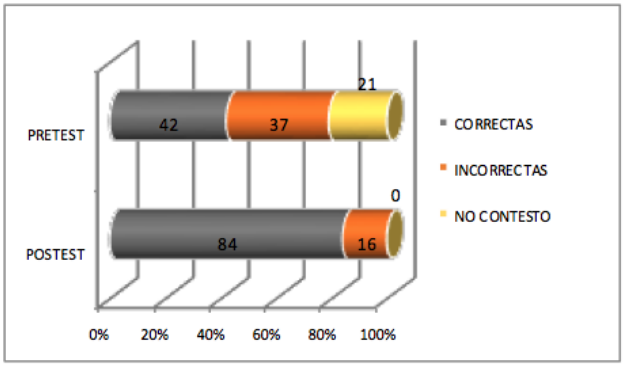
Gráfica 5. Concentrado del postest

B. Estrato Racional

La categorización de estrato racional se ha evaluado en cuatro preguntas.

Pregunta 7. Una taquería vende tacos de canasta a $3.00 cada taco. (a) ¿Cuál es la función lineal que modela el ingreso al vender x número de tacos? (b). Si la persona calcula que se gasta entre renta e inversión $250.00 al día más $0.85 en cada taco ¿Cuál es la función lineal que modela el costo de producir x número de tacos? (c) ¿Cuántos tacos tendrá que vender si quiere un ingreso de $759?00 al día?

El pretest presenta 42% correctas, 37% incorrectas y 21% no contesto. El postest presenta 84% correctas, 16% incorrectas y 0% no contesto, información presentada en la gráfica 6.



Gráfica 6. Comparativo de la pregunta 7

Pregunta 13. Considere la función $p(x) = x^3 - 3$. ¿Cuáles son todas las raíces de esta función?

El pretest presenta 18% correctas, 53% incorrectas y 29% no contesto. El postest presenta 60% correctas, 37% incorrectas y 3% no contesto.

Pregunta 18. Dada la función real $f(x) = x^2 + 1$

Esta pregunta permite evaluar las funciones, se seccionó en 18.1, Determine el valor de $f(-1)$; 18.2, Determine el valor de $f(x+1)$; y 18.3, ¿Cuál es el rango?

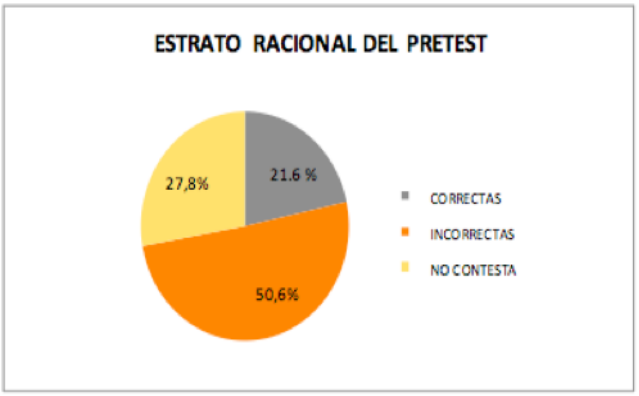
El pretest presenta 26%, 8% y 13% correctas respectivamente, 58%, 58% y 50% incorrectas individualmente; y, por último, 16%, 34% y 37% no contesto, respectivamente. El postest presenta los siguientes porcentajes, las respuestas correctas fue de 92%, 68% y 32% respectivamente, mientras que el porcentaje de respuestas incorrectas fue de 8%, 18% y 68% comparativamente, para finalizar, el porcentaje de respuestas no contestadas fue de 0%, 13% y 0% respectivamente.

Pregunta 19. Dada la función real f(x)=x²/x; se divide en dos la 19.1, ¿Cuál es el dominio y el rango? y la 19.2, ¿Cuál es la raíz o las raíces?

En la pregunta 19.1 el pretest muestra los siguientes resultados, respuestas correctas el 8%, respuestas incorrectas el 50%; y, por último, las preguntas no contestadas o con otra solución obtuvieron el 42%. En el postest las respuestas correctas fue 52%, respuestas incorrectas el 45% y por último las preguntas no contestadas o con otra solución obtuvo el 3%.

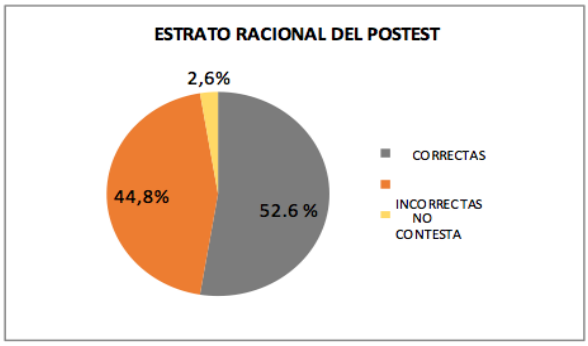
La pregunta 19.2, en el pretest obtuvo los siguientes resultados, respuestas correctas 24%, incorrectas 58% y no contesto 18%. En el postest las respuestas correctas 3%, el porcentaje más bajo de todas las preguntas; incorrectas 94%, el porcentaje más elevado de todo el postest y no contesto 3%.

En resumen, en la mayoría de las preguntas se registró un avance de 40% aproximadamente. La esquematización del porcentaje del estrato racional se puede representar en las gráficas 7 y 8.



Gráfica 7. Concentrado del estrato racional

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org



Gráfica 8. Concentrado del postest en el estrato racional

Como puede apreciarse hubo un incremento en el número de respuestas correctas del estrato racional en el postest, paso del 21.6% al 52.6%, al mismo tiempo se observa una disminución en el número de respuestas incorrectas; por otro lado, hay que observar la pregunta número 19.2, ya que obtuvo el porcentaje más bajo de todo el postest, este elemento influyo en el porcentaje final de este estrato.

C. Estrato Algebraico

Consta de siete preguntas, como a continuación se enumera.

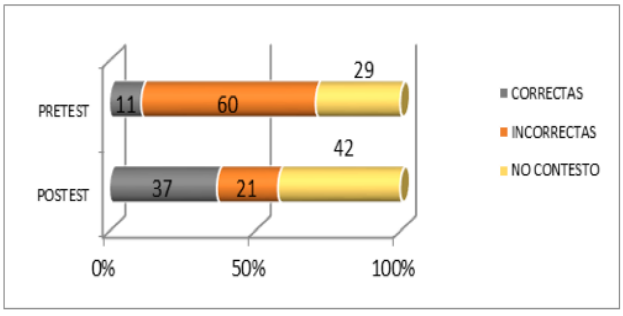
Pregunta 3. Calcular $1/(2n-2)-1/2n$

El pretest presenta 21% correctas, 47% incorrectas y 32% no contesto. El postest presenta 5% correctas, 55% incorrectas y 40% no contesto.

Esta pregunta como ya se mencionó, obtuvo uno de los peores porcentajes del postest. Inclusive existió un retroceso en el porcentaje de respuestas correctas.

Pregunta 6. Reducir los siguientes términos $2a(a-2b)^2+5b[2a(b+a)-b]$

En esta pregunta se le pide al alumno una reducción de términos algebraicos, el pretest presenta 11% correctas, 60% incorrectas y 29% no contesto. En el postest el porcentaje de respuestas correctas fue de 37%, el porcentaje de respuestas incorrectas fue de 21%, por último, el porcentaje de repuestas no contestadas resulto ser el más elevado de todo el postest, fue de 42%, es representada en la gráfica 9.



Gráfica 9. Comparativo de la pregunta 6

Pregunta 11. Marque la respuesta correcta que sea la solución a la desigualdad $-30x+4\leq 0$;

El pretest presenta 18% correctas, 50% incorrectas y 32% no contesto. El postest presenta 58% correctas, 37% incorrectas y 5% no contesto.

Pregunta 12. Resolver $2x^2-3x-2=0$

El pretest presenta 16% correctas, 31% incorrectas y 53% no contesto. El postest presenta 45% correctas, 13% incorrectas y 42% no contesto.

Pregunta 14. Resuelva el siguiente sistema: $x-2y=1,\ x+y=4$

En el pretest el porcentaje de respuestas correctas fue de 31%, el porcentaje de respuestas incorrectas fue de 24%, finalmente, el porcentaje de repuestas no contestadas u otra solución fue de 45%. En el postest el porcentaje de respuestas correctas fue de 71%, el porcentaje de respuestas incorrectas fue de 26%, finalmente, el porcentaje de repuestas no contestadas u otra solución fue de 3%.

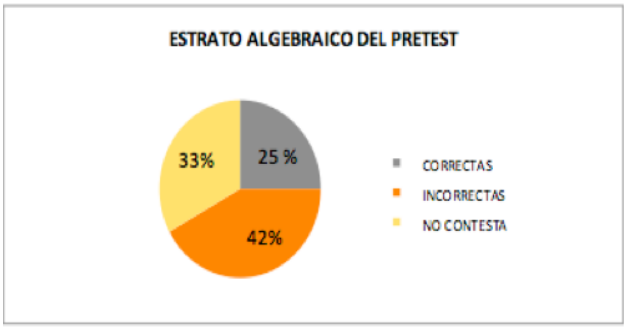
Pregunta 16. En la siguiente ecuación $x=1+1/y$ despeja y en función de x;

El pretest presenta 45% correctas, 31% incorrectas y 24% no contesto. El postest presenta 63% correctas, 32% incorrectas y 5% no contesto.

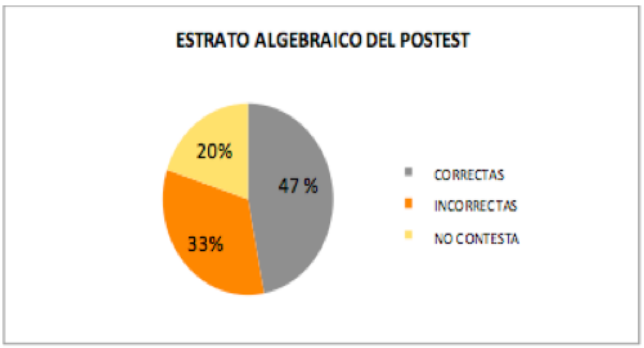
Pregunta 17. Sea la expresión $y=2-1/x$, marque con una x en el cuadro correspondiente a la solución de la ecuación que se cumple.

El pretest presenta 36% correctas, 49% incorrectas y 15% no contesto. El postest presenta 52% correctas, 48% incorrectas y 0% no contesto.

Las respuestas registraron un avance entre el 20% y 40% en general. Las gráficas del resultado de la evaluación del estrato algebraico son presentadas de la siguiente manera en las gráficas 10 y 11.



Gráfica 10. Concentrado del pretest en el estrato algebraico



Gráfica 11. Concentrado del postest en el estrato algebraico

El número de respuestas correctas del pretest al postest en este estrato se incrementó del 25% al 47%, a la par de que el

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

número de respuestas incorrectas y de respuestas no contestadas disminuyo de un 75% a 53%; de esta manera, se obtuvo un avance significativo; no obstante, habrá que observar las preguntas 6 y 12, mención aparte fue la pregunta número 3 que tuvo una disminución en el número de respuestas correctas de la evaluación final.

D. Estrato Funcional

Comprende evaluar derivadas de funciones, mediante tres preguntas:

Pregunta 20. ¿Cuál es la derivada de la función $g(x)=x^2$?

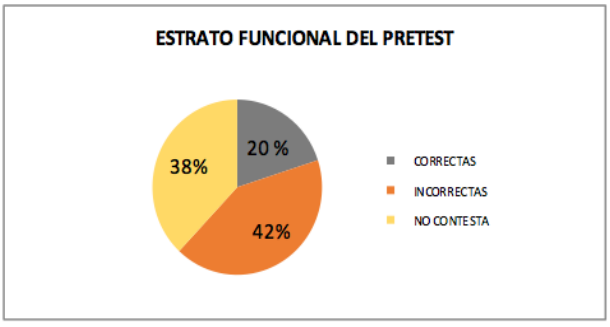
El pretest presenta 39% correctas, 24% incorrectas y 37% no contesto. El postest en esta pregunta fue del 87% de respuestas correctas, cabe destacar el alto porcentaje en comparación con las siguientes preguntas de esta sección de cálculo, las respuestas incorrectas obtuvieron el 13% y por último las preguntas que no fueron contestadas fueron de 0%.

Pregunta 21. ¿Cuál es la derivada de la función $p(x)=(x^2+1)^2$?

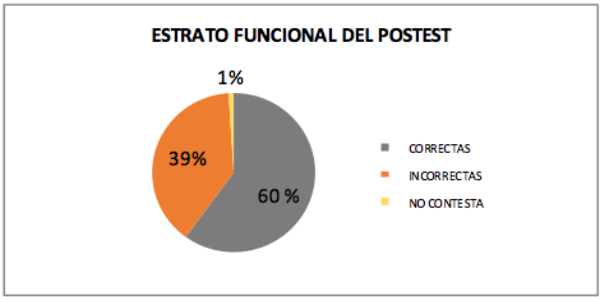
El pretest presenta 11% correctas, 50% incorrectas y 39% no contesto. El postest con un 55% de respuestas correctas, un 42% de respuestas incorrectas; y, por último, con un 3% de preguntas no contestadas o con otra solución concluye esta pregunta de cálculo.

Pregunta 22. ¿Cuál es la derivada de la función $y=1/x$?

El pretest presenta 8% correctas, 53% incorrectas y 39% no contesto. El postest obtuvo el 39% de respuestas correctas; las respuestas incorrectas tienen un 61%; y las preguntas que no fueron contestadas o con otra solución fue de 0%. Las gráficas 12 y 13 muestran el desempeño del estrato funcional en ambas evaluaciones.



Gráfica 12. Concentrado del pretest en el estrato funcional



Gráfica 13 Concentrado del postest en el estrato funcional

El número de respuestas correctas se triplicó, pues paso de un 20% del pretest al 60% del postest; por otro lado, el porcentaje de respuestas incorrectas y las respuestas de la categoría no contesta paso de un 80% a 40%, disminuyó la mitad. La evaluación de este estrato permite observar un aprovechamiento significativo y sólo queda prestar atención a la pregunta número 22. Por otro lado, la evolución del estrato funcional fue satisfactoria, ya que en la evaluación inicial ocupo el último lugar de respuestas correctas de todos los estratos matemáticos, y en esta evaluación final, obtuvo el segundo lugar en número de respuestas correctas, sólo por debajo del estrato aritmético y por arriba del estrato racional y algebraico.

IV. Conclusiones

Los resultados de los cuatro estratos: aritmético, racional, algebraico y funcional señalan en términos generales un avance significativo, las condiciones de evaluación se llevaron a cabo de manera similar y el aprovechamiento escolar es un indicador de la ventaja del uso de una estrategia didáctica definida mediante los EDIC, motivo para cuestionar las condiciones de aprendizaje en el aula y seguir motivando el uso de la tecnología; se verifica así la efectividad de la instrumentación didáctica soportada por el uso de tecnología bajo un enfoque metodológico definido y del seguimiento mediante un instrumento válido. Por otro lado, es importante cuestionarse respecto a lo que sucede en la reproducción de las respuestas incorrectas o el índice mínimo de avance, ya que son aquellas preguntas para las que no se cuentan con actividades bajo el enfoque de los EDIC y es un área de oportunidad para observar las condiciones para proponer alternativas de enseñanza.

El otro aspecto de llamar la atención es la pregunta en donde en el pretest salieron más altos y en el postest disminuyen, al respecto se entrevistaron a una muestra de 10 alumnos, que manifestaron entender el enunciado de la pregunta, pero haberse equivocado en la solución, siendo conscientes de su error, lo cual también es un avance puesto en su mayoría los alumnos no son conscientes de sus errores.

De esta manera se constata lo que varios de los profesores expresan respecto a que los alumnos de nuevo ingreso de nivel universitario no dominan los prerrequisitos necesarios para abordar los cursos de matemáticas del primer año de una licenciatura, en específico para cálculo diferencial e integral; por lo que es común establecer cursos remediales o semestre cero para tratar de solventar las deficiencias; sin embargo, la literatura ha documentado la poca efectividad de esta estrategia. Por lo que presentar un curso incorporando EDIC es una alternativa para solventar esas deficiencias sin salirse del temario y abordando conceptos propios del curso. En definitiva, esta instrumentación didáctica permite valorar el grado de avance de los alumnos y la adquisición de las competencias propias del área para su posterior desempeño en otras asignaturas de matemáticas. Respecto al instrumento como tal, se verificó que se entendieran los enunciados y que la distribución por estratos sea equitativa, al igual que el tiempo de aplicación no sea extenso; al no considerarlo como una evaluación para su calificación los alumnos contestan sin presión y de manera honesta lo que saben realmente.

Referencias

[1] Cuevas Vallejo, Carlos Armando; Pluvinage, Francois; Martínez Reyes Magally: An introduction of digital technologies in the University classroom. *El Cálculo y su Enseñanza*, Año 2, Ene-Dic, pp.171–182 (2010).

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

[2] Cuevas Vallejo, Carlos Armando; Pluvinage, Francois: Les projets D' Action pratiqué éléments D'Une Ingénierie D'enseignement des mathématiques, *Annales de didactique et de sciences cognitives* Vol. 8, pp. 273-279 (2003).

[3] Martinez Reyes Magally: *Diseño de un Entorno Computacional para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas para un curso de cálculo diferencial a nivel superior*, Tesis de Doctorado en Matemática Educativa, CINVESTAV (2005).

[4] Cuevas Vallejo, Carlos Armando; Pluvinage, Francois; Martínez Reyes Magally: *Promoviendo el Pensamiento Funcional en la Enseñanza del Cálculo: Un Experimento con el uso de Tecnologías Digitales y sus Resultados. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 17, IREM de Strasbourg, pp.137–168 (2012).

[5] Soberanes Martín Anabelem; Martinez Reyes Magally; Juarez Landín Cristina: *Recursos digitales como apoyo en la enseñanza matemática en educación superior*. Programación Matemática y Software, Vol. 8, pp.53–59 (2016).

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La gestión de procesos de aprendizaje auténticos del álgebra simbólica en educación secundaria

Juan Manuel Córdoba Medina, María Leticia Rodríguez González.
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.
Av. Instituto Politécnico Nacional 2508 Col. San Pedro Zacatenco México D.F. 07360, México.
juancordoba1974@gmail.com, marletrg1963@gmail.com

***Resumen*- El artículo tiene por objetivo presentar ideas referentes a la importancia de que los docentes de educación secundaria se conviertan en gestores de procesos de aprendizaje auténticos de matemáticas, en particular del álgebra simbólica, con base en el diseño de situaciones didácticas contextualizadas a partir del Conocimiento Pedagógico de los contenidos que han de ser estudiados, dichos procesos deben estar mediados por el uso inteligente de las Nuevas Tecnologías de Información y la Comunicación; del uso de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento. Los Modelos Teóricos Locales, se están consolidando como el marco de referencia teórico y metodológico para la investigación en Matemática Educativa; constituyendo un diseño metodológico distinto al tradicionalmente utilizado en la investigación educativa. Da cuenta de los elementos requeridos para promover procesos de producción de sentido hacia la competencia de uso de Sistema Matemático de Signos del Álgebra.**

***Palabras Clave*- Aprendizaje autentico, conocimiento pedagógico, gestión, producción de sentido.**

Abstract- This article aims to present ideas concerning the importance of high school teachers, so that they become authentic math learning process managers, in particular the symbolic algebra, based on the design of educational situations contextualized from the Pedagogical Knowledge of the contents that have to be studied, these processes must be mediated by the intelligent use of New Information Technologies and Communication, and the Learning Technologies and Knowledge. The theoretical Local Models are being consolidating as the theoretical and methodological reference framework for the researching in Matemática Educativa, building a different methodological design from the traditionally used in the educative research. It let us know the required elements to promote the meaning production processes addressed to developed the competence of using the Algebra Signs Math System.

***Keywords*- Authentic learning, teaching knowledge, management, production of meaning.**

I. Introducción

Los paradigmas educativos se están transformando en parte por las contribuciones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje; así como, por la reconceptualización de sus principales actores: el alumno y el docente, generando una ruptura epistemológica con enciclopedia escolástica, ahora el docente no es aquella figura que posee todo conocimiento, hoy día, el docente es gestor del conocimiento a través de sus alumnos: serán ellos quienes han de construirlo. El aprendizaje se genera en contexto, partiendo de las experiencias personales de cada uno de los alumnos, en el que ponen en juego sus habilidades intelectuales de orden superior; son auténticas porque se realizarán en el mundo real; son proceso y producto porque independientemente de las expectativas de ambos protagonistas, el proceso conlleva al producto; lo que implica que cada docente deberá desarrollar las competencias que le permitan identificarlos.

II. Procesos de aprendizaje auténticos

Los procesos de aprendizaje auténticos, implican que la acción y actuación del docente no está centrada en la enseñanza; sino en su capacidad para gestionar los procesos de aprendizaje de los alumnos; es decir, su compromiso será el diseño de situaciones didácticas que lleven a los alumnos a construir *procesos de aprendizaje auténticos*: los cuales los podemos articular con los aprendizajes situados [1]. Para lograr que aprendizajes auténticos las situaciones didácticas que diseñen los docentes deberan producir sentido para los alumnos, donde las actividades propuestas constituyan verdaderos retos o desafíos, es decir, las situaciones deben estar contextualizadas.

En el caso particular de las matemáticas escolares y de acuerdo con las estrategias para el aprendizaje situado – significativo y experiencial, deberá estar centrado en que los docentes propongan a sus alumnos, la solución de problemas auténticos, el análisis de casos, el realizar prácticas situadas o dicho de otra manera escenarios reales (in situ), aprendizaje de servicio (service learning), aprendizaje colaborativo, aprendizaje basado en retos, aprendizaje basado en proyectos, aprendizaje basado en la construcción de nociones de conceptos y simulaciones situadas; se hace necesario que los procesos de aprendizaje estén mediados por el uso inteligente de las nuevas tecnologías de información y la comunicación (TIC), con base en las tecnologías del aprendizaje y el conocimiento (TAC), sin embargo, todavía muchos docentes no pueden aprovecharlas porque carecen de habilidades básicas necesarias para su uso, debido a que se desconoce y percibe como difícil, y también a una falta de comprensión de las razones metodológicas por las cuales se deben incorporar estas tecnologías a la enseñanza.

En [2] se afirma que "las TAC van más allá de aprender meramente a usar las TIC y apuestan por explorar estas herramientas tecnológicas al servicio del aprendizaje y de la adquisición de conocimiento". Este tipo de formación resignifica las TIC y las pone al servicio del estudio y el trabajo, y permite una verdadera *inclusión digital*, que los docentes sabrán transmitir a sus alumnos. En este nuevo escenario el aprendizaje escolar es el proceso en el cual los

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

estudiantes se integran gradualmente a la comunidad o cultura de prácticas sociales en donde están inmersos; por lo tanto "aprender y hacer" constituyen dos procesos inseparables. Acorde con [3] el aprendizaje implica el entendimiento y apropiación de los símbolos y signos de la cultura del grupo social al que pertenece, los alumnos poco a poco se van apropiando de las herramientas sociales y culturales a través de la interacción con los demás miembros que tienen mayor experiencia.

Este enfoque parte de la idea de que la enseñanza debe de estar enfocada en promover prácticas educativas auténticas que sean relevantes culturalmente y acordes a las actividades sociales. La actividad del docente se constituirá en proceso de andamiaje para que los alumnos promuevan la negociación de significados y la construcción conjunta de saberes. En este sentido el diseño de las situaciones didácticas deberán considerar: al sujeto que aprende; los instrumentos privilegiaran el sentido semiótico; el objetivo de estudio deberá regular la relación entre saberes y contenidos; partir de las características referenciales y culturales de los actores; reconocer las normas por reglas de comportamiento que regulan esas relaciones sociales; así como las reglas que establece la división de tareas en esta comunidad.

Sin embargo, *cognición situada* y *aprendizaje significativo* no es lo mismo, se relacionan de manera sustancial de tal manera que permiten articular la información de conocimientos y experiencias previas, implican la disposición del aprendizaje para aprender significativamente, el papel del docente es fundamental; la aportación de [3] conlleva a considerar la relevancia cultural de la activiad social mediada por el lenguaje (la construcción de signos en su sentido semiótico); la contribución de [4] (situaciones auténticas), donde a través del aprendizaje los individuos van a construir las representaciones de significados y símbolos de los objetos, considerando que ésta es una forma elemental del aprendizaje; en un segundo nivel pasará al aprendizaje de conceptos, por lo que la representación pasará de la asociación símbolo-objeto a símbolo-atributos, organiza el conocimiento en clases, acontecimientos, situaciones o propiedades que poseen atributos comunes a su contexto cultural. Bajo esta perspectiva el aprendizaje adquiere determinadas características: temporalidad de la información, constituyendo durabilidad del aprendizaje, se va construyendo una estructura más compleja de significados.

III. Gestión de aprendizajes auténticos de matemáticas

La transformación de los paradigmas educativos implican que el conocimiento del docente de acuerdo con [5] se traduzca en Conocimiento Pedagógico del Contenido (CPC), en nuestro ámbito incorporamos el Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático (CPCM), lo que implica su profundización: sus formas de representación, demostraciones, trascendencia, entre otras. Además debe contar con: Conocimiento de la asignatura de matemáticas (CA), Conocimiento Pedagógico General (CPG), Conocimiento Curricular (CC), Conocimiento de los alumnos, Conocimiento del Contexto Educativo y; Conocimiento de los fines, propósitos y valores educacionales y sus bases filosóficas e históricas.

Sin embargo, debido a la complejidad que implica la profundidad del conocimiento matemático, la gestión de aprendizajes auténticos de matemáticas, implica que los docentes comprendan el sentido teórico – metodológico bajo el que está diseñado el Plan de Estudios 2011 [6], en donde los 12 principios van a orientar la práctica pedagógica, los cuales atienden a cada uno de los tipos de conocimiento a los que se refiere CPCM, por ejemplo en el (1º) plantea la imprescindible necesidad de que el docente conozca a sus alumnos y en sus procesos de aprendizaje, por lo que deberá indagar antes de planear qué perfiles conceptuales, culturales y sociales tienen sus alumnos; es decir, con qué conocimientos cuentan, qué debilidades tienen, qué desconocen, cómo los han aprendido, qué usos les dan en su contexto cotidiano,… Esto le permitirá planificar para potenciar el aprendizaje matemático (2º) Principio pedagógico), generar ambientes de aprendizaje (3º); promover el trabajo colaborativo para que se pueda construir el aprendizaje (4º), promoviendo que se manifiesten las dudas, obstáculos y resistencias; poniendo énfasis en el desarrollo de competencias y el logro de los Estándares curriculares de los Aprendizajes esperados (5º), en este principio la práctica profesional del docente le permite establecer la congruencia de su acción en relación con los demás niveles educativos, le permite identificar los avances u obstáculos de sus alumnos, asimismo, se constituye un referente con los estándares internacionales, posibilitando analizar la complejidad y gradualidad de los aprendizajes; apoyar su práctica en diversos recursos didácticos para hacer más eficiente el proceso de aprendizaje (6º); reconceptualizar la evaluación como el proceso que les permitirá al maestro y alumnos identificar cómo se van generando los procesos de aprendizaje (7º). Los cinco principios restantes tienen que ver con el Conocimiento Pedagógico General y con el Conocimiento de los fines, valores educacionales, pues consideran la inclusión para atender la diversidad, lo que conlleva a conocer y atender diferenciadamente a cada alumno, respetando sus condiciones culturales, asumiendo un liderazgo para gestionar los aprendizajes; así como generar tutoría y asesoría con sus demás colegas maestros.

Cómo parte del CPCM, el docente deberá conocer los propósitos y aprendizajes esperados de cada grado escolar; así como la relación de los conceptos que servirán de base para cada nivel educativo; lo anterior posibilitará que en educación secundaria, los alumnos cuenten con los conocimientos básicos para el tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo, lo que implica: "Formular y validar conjeturas; plantearse nuevas preguntas; comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución; buscar argumentos para validar procedimientos y resultados; encontrar diferentes formas de resolver los problemas; y manejar técnicas de manera eficiente" [6].

El CPCM, es una oportunidad para que los docentes aprovechen las ventajas que ofrecen las TIC y las TAC; a través del uso de los dispositivos móviles; en lugar de prohibir su uso es usarlos como excelentes herramientas educativas, ya que se puede grabar en audio y video, guardar, navegar en la WEB, para investigar, identificar sitios confiables, comunicar a través de las redes sociales: leer textos, analizar y compartir sus puntos de vista en foros, presenciar demostraciones, identificar patrones para comprenderlos y usarlos en modelos matemáticos, aprender a definir y comprender problemas, ejercicios para practicar

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

algunos contenidos, plantear argumentos matemáticos, jerarquizar conceptos, estimar resultados,… paneles, mesas redondas, talleres, etc. Con estos recursos, los estudiantes y docentes pueden construir distintos sentidos semióticos distintos.

Esta manera de concebir los escenarios para el aprendizaje, implican que los docentes se consoliden como gestores del aprendizaje, es una ruptura epistemológica del planteamiento pedagógico: la gestión pedagógica del docente, irá construyendo diferentes espacios para que los alumnos generen sus propios aprendizajes, más allá de los espacios aúlicos escolares. Haciendo posible la tesis propuesta en [7] de desescolarizar los conocimientos escolares, en donde los sujetos se apropian de ellos como verdaderas herramientas intelectuales en su vida académica y cotidiana.

El Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático de cada docente, les permitirá que generen ambientes en donde el uso del razonamiento sea la herramienta fundamental para la construcción del Sistema Matemático de Signos (SMS) [8] y que sus alumnos puedan representar las formas de solucionar diversos problemas, estableciendo simbolismos y correlaciones a través del uso del lenguaje matemático, por ejemplo en la transición del lenguaje de la aritmética al lenguaje del álgebra. Hacemos mención a la Propuesta que [9] ha venido planteando y estudiando a través de los Modelos Teóricos Locales (MTL), pues no sólo se trata de dar solución a los diversos problemas matemáticos escolares, sino de comprender cómo se van construyendo los conceptos, cómo los usan y cómo se pueden proyectar, en la significación; qué sentido les dan a los textos matemáticos, pues la traducción del conocimiento es a través del texto. El texto es la evidencia del registro sígnico del conocimiento matemático.

IV. Modelos Teóricos Locales y la noción semiótica de Sistemas Matemáticos de Signos

Los Modelos Teóricos Locales (MTL) propuestos por [9] ofrecen un marco de referencia teórico y metodológico para la investigación en matemática educativa, plantea un diseño metodológico distinto al tradicionalmente utilizado en la investigación educativa. Los MTL se caracterizan por la interconexión entre sus cuatro componentes: modelo de los procesos cognitivos, modelo de enseñanza, modelo de comunicación y modelo de competencia formal. Un MTL, es recursivo, pues se orienta al significado dado por el uso, desde el cual se mira el problema original con una nueva perspectiva: se parte de la problemática, se plantea el MTL que se va a desarrollar en la experimentación, y los resultados de la misma inciden sobre la manera como se va a observar la problemática para replantear el MTL. Es local porque, sin pretender ser una teoría ni tener un carácter universal ni replicable en cualquier fenómeno educativo, sirve para explicar fenómenos específicos y también para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña un determinado contenido matemático en los sistemas educativos al tomar en cuenta las cuatro componentes.

La noción de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) surge de algunas consideraciones que [9] hace con la finalidad de normar ciertos criterios para el diseño de modelos de enseñanza y afirma que "la matemática escolar se articula en una serie de redes conceptuales, relacionadas unas con otras y con la característica de que, con el tiempo, los estudiantes van logrando ser competentes en el uso de redes de conceptos cada vez más abstractos y generales; competencias que requieren de otras anteriormente dominadas […]", así también: "el sistema matemático de signos en el que se expresan y comunican los textos matemáticos correspondientes a tales redes conceptuales tiene una estratificación que se corresponde con los diversos usos, que van dando cuenta de acciones, operaciones y transformaciones cada vez más generales y provenientes de estratos del lenguaje (del SMS) cada vez más abstractos".

Derivado de que los alumnos en muchas ocasiones no logran identificar las estructuras subyacentes a las expresiones algebraicas: estructura superficial y estructura sistémica en términos de [10], en [11] se afirma que es común que se generen diversos tipos de errores de sintaxis al manipular expresiones matemáticas, ya sean aritméticas o algebraicas, o bien, en la resolución de ecuaciones de primero y segundo grados, de tal forma que, aun no se les puede considerar a los alumnos "usuarios competentes" de un SMS, es decir, todavía no son capaces de poder leer los textos matemáticos de manera correcta y distinguir las transformaciones permitidas de las que no lo son.

Por otra parte en [12] se ha argumentado que muchas de las dificultades de los estudiantes con el estudio del álgebra simbólica y las transformaciones en la misma son debidas a la falta de comprensión de los estudiantes sobre la estructura de las expresiones. Con respecto a la estructura de una expresión aritmética o algebraica cabe distinguir un significado doble: la estructura externa y la estructura interna. En [13] se considera que la estructura externa muestra los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y relaciones que existen entre ellos. Se trataría de la forma gramatical de las expresiones en términos de [14], la estructura superficial de una expresión en palabras de [10] o la estructura sintáctica, según [15].

La estructura interna describe el valor de la expresión y las relaciones entre los componentes de la expresión con el mismo. Es necesario que los profesores como usuarios competentes del SMS2) tengan en cuenta que en "el proceso de reconocer, manejar o reproducir una estructura, hay muchas demandas cognitivas que el estudiante tiene que realizar para poder operar con símbolos algebraicos" [16].

Por otra parte, [17] menciona que los alumnos a menudo manipulan las expresiones algebraicas siguiendo reglas aprendidas de manera mecánica, sin que le vean sentido a lo que hacen, esto puede atribuirse a su trabajo desligado de las situaciones que le dan sentido, en ejercicios en los que lo único que se plantea es la mera ejecución de reglas de transformación. Sin embargo, las transformaciones algebraicas tienen sentido para los alumnos, no en sí mismas, sino por la posibilidad que ofrecen de mostrar que expresiones distintas pueden representar una misma situación, de tal forma que se vean como un componente esencial del proceso que se está realizando.

Cabe mencionar que, en álgebra, los espacios textuales están constituidos por SMS cuyos códigos y tradiciones provienen de los significados atribuidos a ellos por su uso social. Los textos matemáticos no tienen un sentido independiente, esto

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

es lo que podemos llamar intertextuales en palabras de [18]. En [9] se afirma que si el productor es dueño del objeto que elige para comunicar su mensaje, el intérprete está obligado a efectuar un trabajo de reconstrucción de ese objeto (semiótica inferencial). Así, se puede decir que la mayor parte de los autores se han interesado exclusivamente en el problema de la interpretación de los signos, partiendo de que la producción de sentido y la interpretación son procesos absolutamente reversibles.

Como se indica en [9], la noción semiótica de los SMS permite estudiar los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido. "Lo que hay que calificar de matemático (en el proceso de producción de un texto) no es sólo un tipo particular de signos, sino sobre todo determinados sistemas de signos; es decir, no hay que hablar de sistemas de signos matemáticos, sino de sistemas matemáticos de signos". Así mismo, la noción de SMS también nos permite analizar los sistemas de signos intermedios que generan los alumnos en la resolución de los problemas nuevos. Los diferentes SMS de que disponen (usan sus conocimientos previos) para resolver un problema en el cual necesitan "construir" un SMS nuevo, un problema en el cual sus conocimientos previos no son suficientes.

También en [9] se menciona que existen al menos cuatro fuentes de significado en la generación de los SMS; las cuales vienen dadas por: transformaciones dentro de un sistema matemático de signos de que dispone el aprendiz (SMS disponible) sin referencia a otro sistema matemático de signos del que también disponga (SMS disponible); traducciones a través de SMS disponibles distintos; traducciones entre SMS disponibles y Sistemas de Signos Matemáticos; consolidación, simplificación, generalización y rectificación de acciones, procedimientos y conceptos de los sistemas de signos intermedios creados durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza/aprendizaje.

V. Lectura/Transformación de textos matemáticos y la noción de Producción de Sentido

En el acercamiento teórico propuesto por [8], [19], [20]; la noción de texto se introduce para ser utilizada en el análisis de cualquier práctica de producción de sentido; por ejemplo, cuando el alumno considerado como un aprendiz, éste interactúa con un modelo de enseñanza. En [8], afirman que en esta perspectiva, basada esencialmente en la semiótica de Pierce (1931-58), se hace la distinción entre texto (T) y espacio textual (ET), la cual se corresponde con la distinción entre significado y sentido, por lo que, los textos no han de concebirse como manifestaciones del lenguaje matemático, ni identificarse con los textos escritos.

En [21], se define un texto como "el resultado de la lectura/transformación hecha sobre un espacio textual", cuya intención no es extraer o desentrañar un significado inherente al espacio textual sino producir sentido. El espacio textual tiene existencia empírica, es un sistema que impone una restricción semántica a quien lo lee; el texto es la nueva articulación de ese espacio, individual e irrepetible, realizada por una persona como consecuencia de un acto de lectura. Así [22], define un modelo de enseñanza como una sucesión de textos que son tomados como un espacio textual para ser leído/transformado en otro espacio textual conforme el aprendiz crea sentido en sus lecturas.

Se adjuntan a los SMS, los sistemas de signos o estratos de sistemas de signos que los aprendices producen con el fin de dar sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza. De acuerdo con [9], los textos producidos por lecturas que utilizan diferentes estratos pueden llegar a ser descritos en un SMS, pero cuando esto último no sucede, solamente la creación de un nuevo SMS lo hará posible. El proceso de crear nuevos SMSs para tal propósito es un proceso de abstracción y el nuevo sistema de signos es más abstracto que los anteriores. En nuestro caso, aquí nos ocupa el nuevo sistema matemático de signos del álgebra (SMS2), éste es más abstracto que el sistema matemático de signos de la aritmética (SMS1), el del modelo y el de los estratos intermedios constituidos por las producciones propias de los estudiantes como resultado de su interacción con el modelo propuesto.

Otro de los elementos teóricos empleados en la presente investigación es la noción de producción de sentido, en [23] se menciona que en la transición del conocimiento aritmético al conocimiento algebraico, la adquisición de los nuevos significados algebraicos se da a la par con la adquisición de los nuevos sentidos de uso de las operaciones para la solución de una ecuación. En [24] se afirma que un nuevo sistema matemático de signos el sentido de los signos viene dado por el uso de los nuevos signos de las maneras requeridas por cada uno de los pasos del proceso de análisis y solución matemática descrita en ese SMS. El sistema matemático de signos nuevo queda ligado por la concatenación de las acciones desencadenadas por el proceso de solución de los nuevos problemas, que desde el nuevo sistema de signos se resuelven con el mismo proceso, entonces los sentidos y los significados intermedios construidos para resolver los problemas nuevos, y los sistemas de signos intermedios correspondientes, constituyen estratos del sistema matemático de signos nuevo.

Algunos autores como [8], mencionan que es necesario producir sentido para las nuevas expresiones y las operaciones necesarias con el fin de utilizarlos y no solamente dar sentido solamente a los SMS, además de que, una forma de producir sentido es a través del proceso de verificación, así, los signos compuestos pueden ser nombrados y manipulados como las unidades y posteriormente en los procesos de significación para resolver las nuevas situaciones con que se enfrenta el alumno en las secuencias de enseñanza de la memoria a largo plazo. Además, la distinción entre ET y T es una distinción entre posiciones en un proceso, porque cualquier T, resultado de una lectura de un ET, está de inmediato en posición de ET para una nueva lectura (y así ad infinitum).

Tanto el trabajo de los docentes de matemáticas, como el de los estudiantes en las clases de matemáticas pueden describirse desde el punto de vista de este proceso reiterado de lectura/transformación de espacios textuales en textos. En particular, desde ese punto de vista un Modelo de Enseñanza es una secuencia de textos que se toman como ET para su lectura/transformación en otros T al crear sentido los alumnos en sus lecturas. Ahora bien, como el modelo de enseñanza es

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

una secuencia de textos, producidos tanto por el profesor como por el alumno y estos textos son el resultado del trabajo de ambos en situaciones de enseñanza que son de hecho situaciones problemáticas (que se toman como espacios textuales).

Para dar cuenta de cómo los aprendices se convierten en "usuarios competentes" del SMS2, en la investigación experimental de corte cualitativo realizada por [25], además de recurrir al uso del marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales propuesto por [9], se retomó el concepto semiótico llamado "intertextualidad", propuesto por [18]; utilizado para la lectura/transformación de textos algebraicos requeridos en la resolución de problemas, además, de manera implícita se considera el uso didáctico de los errores de sintaxis en el desarrollo del pensamiento matemático algebraico, propuesto por [26] al momento de observar mediante entrevista clínica con enseñanza la actuación de los estudiantes en el estudio de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita (estudio piloto) y la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita (estudio final); en situaciones de enseñanza/aprendizaje como situaciones de comunicación y de producción de sentido, por lo que, se diseñó un modelo de enseñanza (espacio textual) apropiado, el cual permitió gestionar diferentes procesos de aprendizaje a partir de actividades algebraicas, cuya resolución se apoyó en la modelación de las expresiones algebraicas utilizando para ello un puzzle algebraico propuesto por [27] además de procedimientos algebraicos utilizando lápiz y papel y del CAS (Sistema Algebraico Computacional) incluido en una Calculadora Simbólica.

Cabe mencionar que el método de resolución de ecuaciones de segundo grado con puzzle algebraico, está basado en la transformación algebraica de la expresión general de la ecuación dada. Por ejemplo en la Ec. 1.

$$ax^2 \pm bx \pm c = 0 \qquad (1)$$

se puede identificar en su estructura superficial en palabras de [10], un trinomio de segundo grado en el primer miembro de la misma, por lo que la ecuación requiere de ser transformada en una ecuación equivalente más sencilla con expresión factorizada o en forma de binomio al cuadrado, con o sin termino independiente, la cual es obtenida de la medida de las dimensiones del rectángulo o cuadrado resultante que es construido utilizando las piezas del puzzle algebraico que representa la expresión algebraica (trinomio de segundo grado) que está escrita como primer miembro de la ecuación de segundo grado inicial. Las soluciones de la ecuación, si las hubiese, se obtienen utilizando procedimientos algebraicos "directos" de resolución con la ecuación equivalente obtenida, es común recurrir al uso del criterio de los factores nulos o el criterio de la raíz cuadrada.

Al concluir el estudio de [25], la mayoría de los alumnos que fueron sujetos de estudio lograron diferentes niveles de competencia de uso del SMS2 en los cuales se identificaron varios estratos de intertextualidad con base en la lectura/transformación de textos algebraicos.

Por otra parte, el estudio realizado por [28] tuvo como propósito investigar los procesos de transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica para la resolución de ecuaciones lineales, cuando se utiliza un modelo de enseñanza concreto, virtual y dinámico con alumnos de secundaria. Al final del estudio, los alumnos evidenciaron un avance significativo en la resolución de ecuaciones y se puede decir que en su mayoría lograron realizar la transferencia de las acciones efectuadas con el sistema de signos del modelo concreto (balanza virtual) a acciones que se ejecutan con el sistema de signos del álgebra. A su vez, se observó que los procesos de transferencia pasan por diferentes etapas, dependiendo del sistema de signos hacia el cual se logra la transferencia de acciones.

Finalmente podemos considerar que la corriente teórica propuesta por [8] y [18] desarrollada en matemática educativa en las dos últimas décadas, ha sido retomadas en diversas investigaciones, como en [25] y [28] por mencionar algunas, las cuales han propuesto modelos de enseñanza con base en procesos de comunicación y producción de sentido en el nivel de secundaria, y que de forma indirecta nosotros identificamos que con la implementación de dichos modelos de enseñanza y otros similares se pueden gestionar procesos de aprendizaje auténticos; lo anterior con referencia en el Conocimiento Pedagógico de los Contenidos Matemáticos, en particular de los contenidos del álgebra simbólica referida también en [9], [11], [25] como SMS2, enriqueciendo la práctica con el uso de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación; con la mirada de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento. Optimizando todas las posibilidades que ofrecen los distintos dispositivos móviles; dentro y fuera del salón de clases. Esta inclusión digital, abre a los docentes una alternativa de opciones para promover aprendizajes auténticos matemáticos, a partir del uso particular de Sistemas Matemáticos de Signos. Desde esta perspectiva los alumnos también asumen un liderazgo para gestionar sus propios aprendizajes; que les permitirán desarrollar tutorías y asesorías hacia sus compañeros. Por lo tanto el impacto de la docencia, conlleva a generar la autonomía en los estudiantes a partir del diseño de actividades que gestionen aprendizajes basados en retos, resolución de problemas y la colaboración.

REFERENCIAS

[1] Díaz Barriga, F.: *Enseñanza Situada*. México, McGraw Hill (2005)

[2] Lozano, R.: *Las 'TIC/TAC': de las tecnologías de la información y comunicación a las tecnologías del aprendizaje y del conocimiento*. http://www.thinkepi.net/las-tic-tac-de-las-tecnologias-de-la-informacion-y-comunicacion-a-las-tecnologias-del-aprendizaje-y-del-conocimiento Accedido el 10 de agosto de 2016 (2011)

[3] Vigotsky, L. S: *Obras Escogidas. I Problemas Teóricos y metodológicos de la Psicología.* Machado Grupo de Distribución, S.L., pp. 123-126 (1982)

[4] Ausubel, D.P.; Novak, J. D.; Hanesian, H.: Significado y Aprendizaje Significativo. Psicología Educativa un punto de vista cognoscitivo. Editorial Trillas. (2012)

[5] Shulman, L. S. Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma. Knowledge and teaching: Fundations of the New Reform. www.ugr.es/~recfpro/Rev92.html. *Revista de Curriculum y formación del profesorado.* Vol. 9, Núm. 2, (2005). pp. 1-30. Accedido el 30 de mayo de 2016.

[6] S.E.P. Plan de Estudios 2011. Conaliteg. pp. 20-42. (2011)

[7] Ferreiro, E.; Teberosky, A. *Los Sistemas de Escritura*. Editorial SXXI. (1986)

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

[8] Filloy, E. Rojano, M. T., Puig, L. *Educational Algebra: A theoretical and Empirical Appoach.* Springer. (2008)

[9] Filloy, E. *Aspectos teóricos del Álgebra Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V. (1999)

[10] Kieran, C. The early learning of algebra. A structural perspective, en Wagner y Kieran, (eds.), pp. 33-56 (1989)

[11] Filloy, E. & Córdoba, J. La intertextualidad en el uso competente del sistema matemático de signos algebraico/Intertextuality in the competent use of mathematical system of algebraic signs. In Preciado Babb, A.P., Solares Rojas, A., Sandoval Cáceres, I.T., & Butto Zarzar, C. (Eds.). *Procedings of the Forts Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*, pp. 127-132. Calgary, Canada. (2013)

[12] Hoch, M. y Dreyfus, T. Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psyschoology of Mathematics Educations, 3, pp. 49-56. Bergen, Norway: Bergen University College. (2004)

[13] Molina, M. Proyecto investigador. Plaza titular de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (2012)

[14] Esty, W.W. Language concepts of mathematics. Focus on Learning Problems in Mathematics 14 (4), pp. 31-53 (1992)

[15] Kirshner, D. The gramar of symbolic elementary algebra. Uopublished doctoral disseertation, University of British Columbia, Vancouver. (1987)

[16] Sfard, A. y Linchevski, L. The Gains and Pitfalls of Reification-the Case of Algebra. Educational Studies in Mathematics, 26, pp. 191-228 (1994)

[17] Puig, L. Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (Anexo, pp. 1-20). Jaén: SEIEM (2012)

[18] Filloy, E. Rojano T., & Puig L. Intertextuality in Algebra. Empirical Evidence Concerning the Solution of Word Problems and of linear Equations Systems. 35th Conference of the International Group for the Phychology of Mathematics Education. 1. p. 296 Ankara, Turkia. (2011)

[19] Kieran, C. y Filloy, E. El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias, (7) pp. 230-240 (1989)

[20] Puig, L. Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.) Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual Fondo de Cultura Económica/CINVESTAV: México, DF. pp. 174-186 (2003)

[21] Talens, J. y Company, J.M. The textual space: On the Notion of Text. The Journal of the Midwest Languaje Association, 17(2), pp. 24-36 (1984)

[22] Rojano, T. Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas.* Vol. 75, Noviembre de 2010, pp. 5-20. http://www.sinewton.org/numeros. (2010). Accedido el 3 de enero de 2011.

[23] Filloy, E. y Rojano T. Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics, 9 (2), pp. 12-25 (1989)

[24] Filloy, Yagüe E. Cognitive tendencias and abstraction processes in algebra learning. In Furinghetti (ed.). *Procedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2. Assisi, Italy. pp. 48-56. (1991)

[25] Córdoba, J. Intertextualidad y producción de sentido en la lectura/transformación de textos algebraicos en la enseñanza/aprendizaje en secundaria. Tesis doctoral. México: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. (2016)

[26] Córdoba, J. Uso didáctico de errores de sintáxis para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México, (2005)

[27] Larrubia, J. Resolución de ecuaciones de segundo grado con puzzle algebraico en 3° de ESO. Tesis doctoral. Universidad de Málaga, España. (2005)

[28] Bonilla, M. Transferencia del aprendizaje situado de la sintaxis algebraica: ecuaciones lineales y balanza virtual. Tesis doctoral. México: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. (2014)

CAPÍTULO 3

"Experiencias en la docencia de las matemáticas y su reflexión"

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Estrategia de enseñanza para alumnos de biología

Melisa Gutiérrez Juárez[#]
[#]Facultad de Ciencias , Universidad Nacional Autónoma de México,
melisa.gutierrez.juarez@ciencias.unam.mx

***Resumen*- En este artículo hablo de mi experiencia docente, las estrategias que utilicé para logra que el desempeño de los alumnos y su motivación incrementaran, con el objetivo de que los alumnos aprendan a utilizar las herramientas matemáticas en su área de estudio. Para ello use el modelo Van Hiele que es una excelente guía para los profesores ya que desarrolla muy bien las fases del aprendizaje del alumno. Y conforme se desarrolló el curso note que los alumnos lograron aprender nuevas herramientas y aplicarlas para su uso en la bilogía. Al final concluí que es importante observar a nuestros alumnos para así crear una estrategia que se adapte a su nivel de conocimientos y habilidades.**

***Palabras Clave*- modelos de Van Hiele, Biología, estrategias.**

***Abstract*- In this article I will talk about my teaching experience, I used several strategies to achieve the student performance and motivation to increase, with the aim that students can learn to use mathematical tools in their field of study. For them I used the Van Hiele model that is an excellent guide for teachers because the phases of student learning are explained in detail.And acording with the progress of the course my students were able to learn and apply new tools for use in their field of study. At the end I concluded that it is important to observe our students in order to create a strategy that fits your levels of knowledge and skills.**

***Keywords*- Van Hiele model, Biology, strategies.**

I. Introducción

Las matemáticas se han caracterizado por ser una asignatura con mayor índice de reprobación, y entre los alumnos existe un recelo hacia esta materia pues no logran obtener los conocimientos necesarios para comprender y resolver los distintos problemas que se les plantean en el aula de clase. Después de recorrer todo este camino hasta la universidad y conocer muchos profesores y profesoras con distintas formas de enseñanza me he dado cuenta que las matemáticas no son tan complicadas como nos parecen. Si no que las formas de enseñanza no han sido las adecuadas, a pesar de que existen muchas corrientes educativas con distintos métodos de enseñanza, no son aplicables para todos los grupos a lo que se les imparte esta materia, cada grupo de alumnos es diferente, su nivel de conocimiento es distinto así como sus formas de aprendizaje, es por eso que el profesor o profesora debe adaptarse a estas situaciones y encontrar una estrategia didáctica adecuada.

II. Desarrollo

En mi experiencia docente en la facultad de ciencias impartiendo la clase de matemáticas II para los alumnos de la carrera de bilogía me enfrente a un grupo de alumnos que tenían problemas para desarrollarse en clase pues tenían mucha inseguridad, temían equivocarse o les daba vergüenza preguntar sus dudas así que por esta razón era complicado llevar el curso pues los alumnos eran poco participativos. Así pues decidí comenzar por darles seguridad a los alumnos para que dejaran a tras sus miedos y vergüenza ya que el motivo por el que se estudia es para aprender nuevos conocimientos y así ampliar su visión del mundo.

Es por esto que opte por desarrollar una estrategia para que el grupo tuviera un buen desempeño y los alumnos adquirieran los conocimientos necesarios para poder utilizarlos en su campo de estudio, ya que las matemáticas son una herramienta muy importante para el desarrollo profesional de un egresado de la carrera de bilogía.

El modelo educativo que utilice fue "el modelo Van Hiele": el cual fue creado en 1953 por Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele de nacionalidad holandesa, quienes presentan una teoría de enseñanza y aprendizaje en la geometría, a pesar de que es para un área específica en las matemáticas yo considere que su metodología es aplicable para otras áreas de las matemáticas.

El modelo comienza describiendo las distintas formas de razonamiento la primera es descriptiva y la segunda es instructiva. Continúa explicando que los alumnos pasan por 5 niveles de razonamiento: reconocimiento, análisis, clasificación, deducción y rigor.

Posteriormente enuncia y describe las 5 fases de aprendizaje que me sirvieron de guía para desarrollar mi estrategia didáctica, las cuales describiré a continuación:

La primera fase es Información: comienza mostrando un panorama general de lo que se aprenderá durante el curso, el material a utilizar y alguna actividad que ponga a prueba los conocimientos que posean los alumnos, esto con la finalidad de establecer un punto de partida para el desarrollo del curso.

La segunda fase es Orientación dirigida: se busca que el profesor desarrolle actividades muy concretas para que el alumno pueda descubrir los elementos característicos, conceptos importantes y las relaciones que guardan con el objeto de estudio. El objetivo de esta fase es que el alumno adquiera los conocimientos básicos del tema.

La tercera fase es Explicitación: en esta etapa se pondrá a prueba al alumno con problemas que le deberá resolver con las herramientas que adquirió en la fase anterior. Después de cada actividad se puede hacer un intercambio de experiencias para que los alumnos interactúen ente ellos y compartan sus resultados.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La cuarta fase es Orientación libre: Aquí se busca que los alumnos se enfrente a problemas con una mayor gama de posibilidades para resolverlos, de esta forma se lograra que el alumno perfeccione las habilidades adquiridas, el profesor deberá procurar dejar indicios que ayuden al alumno a elegir las herramientas adecuadas para la resolución del problema.

La quinta fase es Integración: el objetivo de esta fase es que el alumno haya adquirido un panorama general de los contenidos visto en clase y de las herramientas que tiene a su alcance para usar en los distintos problemas que se le presenten.

Entonces siguiendo la primera fase del modelo inicie con un examen diagnóstico para saber que conocimientos poseían los alumnos y así hice un repaso de conocimientos básico que son necesarios para aprender los contenidos de la asignatura, esto ayudo a los alumnos a tener una mayor confianza en ellos mismos, de esta forma los alumnos preguntaban dudas que habían surgido tras ver algunos procesos o herramientas para resolver algún problema que habían estudiado con anterioridad. Esta etapa ayudo a establecer un punto de partida y logro motivar a los alumnos.

Para la segunda fase como la primera unidad de matemáticas II son límites, busque ejemplos que ayudaran a los alumnos a ver de forma intuitiva que era un límite los ejemplos que utilice fueron; el límite de crecimiento de alguna población, el límite de recursos naturales, el límite de una producción agrícola, etc. Decidí iniciar con esta clase de ejemplos porque había alumnos que no tenían ningún conocimiento acerca de este tema y de esta forma no sería tan tajante la introducción de los límites, ya que considero que es importante que los alumnos asocien el conocimiento a algo que puedan ver en su campo de estudio, así podrán recordarlo y aplicar este conocimiento en su área de estudio.

Ya que los alumnos habían comprendido el concepto de límite, procedí a mostrarles la expresión matemática de algunos fenómenos naturales que se habían visto con anterioridad y les mostré el comportamiento de la función en el plano cartesiano al ir evaluando en distintos puntos, esto ayudo a que visualizaran hacia donde se dirigía la función y que al hacer que el valor de la variable se acercara al número al que tendía la función llegaría a un límite y este sería el resultado buscado. Así fue como les presente los límites de funciones.

Posteriormente seguimos con limites especiales, les explique que algunos límites que se encuentra en forma de fracción se indeterminan si al sustituir el límite el denominador se vuelve cero y que existen varios métodos algebraicos para resolverlos dependiendo de que limite sea.

El último tema fue límites de sucesiones y para ilustrarlo hable de la sucesión de Fibonacci (inicia por la unidad, cada uno de sus términos es la suma de los dos anteriores 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…) esta sucesión aparece frecuentemente en la naturaleza tal es el caso de la reproducción de conejos, la distribución de las hojas alrededor del tallo y el número de espirales que tiene una flor.

Para la tercera fase diseñe tareas para los 3 subtemas de límites, cada clase se llevaban una tarea para resolver en casa, con el objetivo de practicar lo visto en clase, siempre se resolvían las tareas en la siguiente clase y se aclaraban todas las dudas que surgían en los alumnos. De esta forma los alumnos lograron recordar los distintos métodos de resolución de límites. También en varias clases los alumnos pasaban al pizarrón a resolver problemas, esto lo hice porque note que aún había personas con dudas pero que no se atrevían a preguntar o bien alumnos que sabían la teoría pero no sabían cómo aplicarla a los distintos, y al pasar al pizarrón preguntaban todas sus dudas y lograban resolver el problema, en algunos caso sus propios compañeros los ayudaban.

Al ver que entre ellos se ayudaban y orientaban decidí para la cuarta etapa hacer algunas actividades en equipos, con problemas que se podían resolver por dos o tres formas distintas que los llevaban a los mismos resultados, esta clase de actividades ayudo a que pusieran a prueba las habilidades que habían desarrollado durante las clases y en sus horas de estudio. Algo que me gusto de estas actividades es que todos aportaban ideas para resolver los problemas utilizando las herramientas que cada uno dominaba y así llegar al resultado correcto.

La quinta fase la use para la aplicación de exámenes ya que el alumno ya tiene las herramientas y conocimientos necesario para resolver cualquier límite, aunque los resultados no fueron excelentes hubo un alto índice de aprobación aproximadamente un 80% de los alumnos tuvo una calificación aprobatoria.

Viendo estos resultados continúe aplicando distintas estrategia que se adaptaran a los contenidos y que facilitaran a los alumnos la compresión de todas las unidades que se estudian durante el curso.

Con forme avanzo el curso note que los alumnos se volvían más participativos y seguros de los conocimiento que habían adquirido, lo cual ayudo a que ciertas estrategia como el trabajo cooperativo y colaborativo pudieran desarrollarse de forma natural dentro del curso.

III. Conclusiones

Después de tener esta experiencia como docente me di cuenta que es importante observar a nuestros alumnos para encontrar una didáctica que se adapte a ellos, ya que los alumnos presentan distintos conocimientos y niveles de razonamiento, para que alcancen un máximo de conocimientos y habilidades. También recomiendo no limitarse a una sola estrategia, a veces el combinar varias formas de enseñanza ayudan a que los alumnos logren incrementar su potencial académico y disfruten sus clases.

Agradecimientos

Agradezco a mis profesores Antonio García Flores y María Alejandra del Seminario de enseñanza I-IV que curse en la Facultad de Ciencias.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

También al profesor Roberto Ríos Vargas por darme la oportunidad de impartir la clase de Matemáticas II para la carrera de bilogía.

REFERENCIAS

[1] M.L. Crowley (1987), The van Hiele model of development of Geometric thought, N.T.C.M.: Learning and teaching geometry, K12, N.T.C.M., Reston, (pp. 1-16).
[2] García, A (2013), Seminario de Enseñanza de las Matemáticas I en la EMS, Recuperado de: http://semat2014.blogspot.mx/2013/10/el-modelo-de-van-hiele.html.
[3] Usiskin, Zalman (1982), Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry, University of Chicago.
[4] A.P. Jaime y A.R. Gutiérrez, Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele, Práctica en Educación Matemática: Capítulo 6o, pág. 295-384. Ediciones Alfar, Sevilla, 1990.
[5] Díaz, F & Hernández, G, (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Ed. Mc Graw Hill.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

El proyecto integrador en el aula de matemáticas como estrategia de aprendizaje para futuros ingenieros

Viridiana Jiménez Martínez#, María del Consuelo Macías González#; y Rosa Araceli De los Santos Ramírez#
#Departamento de Ingeniería en Sistemas Computacionales, Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli.
mirandmor@gmail.com, consuelo.macias@tesci.edu.mx, ing.rasr.man@hotmail.com.

***Resumen*- Este trabajo de investigación tiene como objetivo mostrar la experiencia de la implementación del proyecto integrador para la mejora del aprendizaje significativo en la rama de las matemáticas. Actualmente las instituciones de educación superior persiguen generar estrategias que fortalezcan el aprendizaje, el proyecto integrador, es parte de la transición que hoy por hoy se está realizando en los planes de estudio y que conllevan al estudiante a desarrollarse. Por otra parte, ´el uso de la matemática ha ido ocupando un lugar importante en el ámbito educativo y de investigación, por lo que se propone desarrollar un trabajo colaborativo con ingenieros en sistemas computacionales para poder fortalecer la enseñanza en el aula de matemáticas y de programación.Para abordar la cuestión, se sitúa la problemática en una formación de ingenieros, considerando el Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli (TESCI) y los cursos de métodos numéricos, tópicos avanzados de programación y ecuaciones diferenciales que se cursan en el cuarto semestre de la carrera.**

***Palabras Clave*- estrategia, matemáticas, proyecto integrador.**

***Abstract*- This paper show the experience in implementation of the integrative project for the improvement of meaningful learning in the branch of mathematics. At present, institutions of higher education seek to generate strategies that strengthen learning, the integrative project, is part of the transition that is taking place today in the curricula and that lead the student to develop. On the other hand, 'the use of mathematics has been occupying an important place in the educational and research field, so it is proposed to develop a collaborative work with engineers in computer systems in order to strengthen teaching in the classroom of mathematics and To address the issue, the problem is placed in a training of engineers, considering the Technological of Higher Studies of Cuautitlán Izcalli (TESCI) and the courses of numerical methods, advanced topics of programming and differential equations that are taken in the fourth semester of the career.**

Keywords- Strategy, math, integrative project.

I. Introducción

Definamos como proyecto integrador como un trabajo técnico y/o científico de carácter analítico que se elabora en un área específica del conocimiento, por medio del cual el alumno pone en evidencia los conocimientos adquiridos de forma integrada a lo largo de un periodo determinado de estudios. Dicho trabajo está dirigido a proponer una acción innovadora en el ámbito profesional.

Para implementar el proyecto integrador se necesita dos o más materias donde una de ellas se considerará como la materia eje, el objetivo principal de dicho proyecto es desarrollar e integrar los atributos de la competencia adquirida, así como la formación, de tal manera que el alumno fortalezca el aprendizaje significativo.

Una de las razones que orientan a este trabajo es ¿por qué la matemática aplicada puede tener lugar en una formación de futuros ingenieros sin tener las bases necesarias? Diferentes trabajos se han puesto de manifiesto que reconocer las necesidades matemáticas de los ingenieros en su práctica constituye una fase necesaria para la adaptación de la formación básica de ingenieros.

Por otra parte, la teoría-modelación matemática que parece dibujarse en la contribución de Pollak al estudio ICMI 3 publicado en 1988, solicita el desarrollo de actividades didácticas basadas en modelación matemática para la formación de ingenieros.

Estos trabajos y el cuestionamiento inicial nos motivan para dar pie al inicio de este trabajo de investigación. Esta cuestión nos permite indagar sobre los recursos que pueden ser llevados al aula sustentándolos y así generar en el estudiante un pensamiento analítico, objetivo y preparado para la toma de decisiones.

Con el objetivo de apoyar en la identificación del uso de las matemáticos dentro la formación de ingenieros, se inicia desarrollando un trabajo colaborativo con diversas áreas, ingenieros en sistemas computacionales con la finalidad de realizar la solución de una problemática mediante la ayuda de diversas áreas, es decir, de manera interdisciplinaria, donde el lenguaje ingenieril sea transpuesto para hacer más sencilla la manera en que los modelos serán utilizados en el aula y propongan una solución.

II. Desarrollo

Para el diseño de este proyecto, se consideró proponerlo para estudiantes de cuarto semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales. Iniciando con el análisis a priori de las asignatuas a considerar.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La siguiente tabla muestra las asignaturas seleccionadas para este trabajo.

Tabla I
Asignaturas clasificadas

ASIGNATURA	CLASIFICACIÓN
Ecuaciones Diferenciales	Materia Eje
Tópicos Avanzados de Programación	Materia Integradora
Métodos Numéricos	Materia Integradora

La materia eje es Ecuaciones Diferenciales ya que, sustentará el objetivo de realizar una transformacion de pensamiento en el estudiante donde lleve las matemáticas del aula a la solución de un problema propuesto, cumpliendo con cada una de las competencias específicas de las asignaturas antes mencionadas.

Identificando la competencia específica a desarrollar de la asignatura eje, tenemos: "Resuelve ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de orden superior y modela la relación existente entre una función desconocida y una variable independiente para analizar sistemas dinámicos que se presentan en la ingeniería", por lo cuál se seleccionaron los subtemas 2.1.6, 2.2 y 2.3, mismos que nos permitirán dearrollar habilidades, aptitudes y conocimientos en el proyecto de acuerdo a la competencia a trabajar.

No.	Temas	Subtemas
2	Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.	2.1 Teoría preliminar. 2.1.1 Definición de ecuación diferencial de orden n. 2.1.2 Problemas de valor inicial. 2.1.3 Teorema de existencia y unicidad. 2.1.4 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. 2.1.4.1 Principio de superposición. 2.1.5 Dependencia e independencia lineal Wronskiano. 2.1.6 Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. 2.1.6.1 Reducción de orden. 2.2 Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes. 2.2.1 Ecuación característica de una ecuación diferencial lineal de orden superior. 2.3 Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. 2.3.1 Método de los coeficientes indeterminados. 2.3.2 Variación de parámetros. 2.4 La ecuación diferencial de Cauchy-Euler. 2.5 Aplicaciones.

Figura1. Temario de Ecuaciones Diferenciales, Unidad 2.

Para la materia de Métodos Numéricos la competencia específica a identificada para trabajar es: "Aplica los métodos numéricos con el objeto de solucionar ecuaciones mediante los métodos de intervalo e interpolación apoyada de un lenguaje de programación", relacionandolo con los temas a abordar los son los métodos de solución de ecuaciones: biseccion y de aproximaciones sucesivas.

No.	Temas	Subtemas
2	Métodos de solución de ecuaciones	2.1 Métodos de intervalo. 2.2 Método de bisección. 2.3 Método de aproximaciones sucesivas. 2.4 Métodos de interpolación. 2.5 Aplicaciones.

Figura 2.- Temario de Métodos Numéricos, Unidad 2.

Finalmente para la materia de Tópicos Avanzados de Programación la competencia a cumplir es: "Desarrollar aplicaciones básicas para dispositivos móviles, considerando su entorno operativo." Los temas a abordar son los que se encuentran encerrados en la siguiente figura:

No.	Temas	Subtemas
5	Programación de dispositivos móviles.	5.1. Introducción a las tecnologías y herramientas móviles. 5.2 Clasificación y aplicaciones de los dispositivos móviles. 5.3 Entorno operativo de las aplicaciones móviles. 5.4 Desarrollo de aplicaciones móviles. 5.5. Aspectos de seguridad.

Figura 3. Temario de Tópicos Avanzados de Programación, Unidad 5.

Lo anterior, será lo que nos definirá la fase de la integración curricular para la implementación de un proyecto integrador, tal como se define en los lineamientos del Tecnologico Nacional de México.

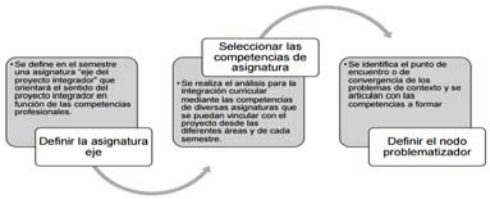


Figura 4. Integración curricular para la implementación de un proyecto integrador

El nodo problematizador, es aquel que requiere encontrar el punto medio de las asignaturas seleccionadas, por lo cual mediante el análisis de las competencias anteriores, se propone como: el diseño de un programa donde se resuelva una ecuación diferencial utilizando los métodos numéricos.

En este proyecto integrador se pretende que el estudiante involucre conocimientos de las tres áreas seleccionadas, que las ponga en práctica y que sus habilidades, aptitudes y actitudes ante cualquier situación le permitan afrontar la problemática.

III. Metodología

El desarrollo de este trabajo se basará mediante la metodologia propuesta de proyecto integrador formativo: donde se direcciona, se planean, se actúa y se comunica lo realizado.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

En la primera fase, el direccionamiento, se le mencionan las metas a alcanzar al estudiante, que en este caso será, proponer la solución a la ecuación diferencial mediante los métodos numéricos y reflejándolo en el diseño de un programa que le permita facilitar el procedimiento de la solución de las matemáticas.

La planeación, segunda fase, se efectúa de acuerdo a las actividades a realizar que los lleve a las metas propuestas, por lo que se pretende que el estudiante:

1. Aborde la ecuación diferencial, definiendo los elementos que permitirán encontrar las raíces y que mediante los métodos numéricos (bisección o aproximaciones sucesivas) se encontrará la aproximación que apoyará a la solución de la ecuación.

2. Desarrollará una aplicación de software concurrente con interfaz gráfica donde implementará lo aprendido con respecto a las tres asignaturas.

El estudiante ejecutará las tareas de acuerdo a los tiempos y espacios designados, mismos que llevarán un seguimiento parcial por parte del profesor para orientarlos a la solución de la problemática.

Por último, mediante una exposición del trabajo se realizará la fase de la comunicación, donde, propondrá y comentará lo encontrado en el desarrollo del proyecto con respecto a las tres áreas involucradas.

Dentro de las tareas que se plantearon al estudiante es el de encontrar la solución de un problema de aplicación donde lo resuelve por medio de una ecuación diferencial no homogénea de grado *n* por el método de coeficientes indeterminados considerando solo el caso de la solución de raíces reales. El estudiante debe conocer la forma de plantear el problema (modelarlo), hallar la solución de la ecuación mediante el tema propuesto, entendiendo que para encontrar dicha solución general se basa en dos resultados, primero se encuentra con coeficientes constantes (y_h) para posteriormente seguir resolviendo la ecuación diferencial por el método de coeficientes indeterminados (y_p). Revisada la forma de solución, se propone encontrar las raíces por el método general, donde es aquí donde los Métodos Numéricos se involucran para encontrar parte de la solución propuesta.

Para el desarrollo, se le probee al estudiante informacion que le será útil para llevar a cabo su trabajo, como por ejemplo el artículo "Importancia de la Ingeniería de Software en la producción de software". (1)

Esto le permitirá al estudiante documentarse para preparar lo consecuente.
Al realizar lo anterior, se pretende que el estudiante desarrolle una aplicación de software concurrente con interfaz gráfica, de manera particular donde se ejecuten las operaciones correspondientes para hallar la solución general de la ecuación diferencial, donde involucrará diversos conocimientos de las asignaturas involucradas.

IV. Resultados y Conclusiones

Dentro del desarrollo del proyecto integrador, los estudiantes mostraron disposición al ver reflejado en un producto final, el uso de las matemáticas y que con ayuda de sus conocimientos de la programación la ejecución.

En un inicio, se presentaron cuestionamientos, ya que la forma en que se evalúa no es la tradicional. En este caso, cada uno de los estudiantes, aun siendo en equipo el proyecto, tendría que involucrarse para poder estar en la sintonía de cada una de las fases que desarrollan.

Aunque al estudiante no se le informó tal cual las fases, se involucró y continúo el proyecto, ya que esto le permitiría desarrollar sus habilidades como futuro ingeniero en Sistemas Computacionales.

Dentro de los resultados obtenidos al cuestionar a los estudiantes después de realizar el proyecto, la mayoría mostro satisfacción de trabajar de manera interdisciplinaria ya que, para problemáticas posteriores, fortalecen los vínculos de conocimientos de diversas áreas que le permitirán tener las bases necesarias para la aplicarlas en un contexto real con ayuda de sus compañeros.

Ahora bien con el objetivo de buscar estrategias didácticas que impacten en el área del de futuros ingenieros, nos permitimos involucrar a las condiciones de enseñanza del aula el proyecto integrador, donde se pone en marcha una metodología estudiante desarrollar sus competencias de manera simultánea y crear en el la confianza de poder trabajar en equipo, la comunicación y la fortaleza de toma de decisiones.

En este trabajo se consideró el planteamiento y ejecución de las fases para que el proyecto impacte tres áreas diferentes de conocimiento. Sin embargo, se considera que esta primera experimentación nos permite conocer potencialidades y límites de dicha propuesta de proyecto integrador, para así llevar a cabo modificaciones requeridas en cada una de las tareas solicitadas.

Mediante la observación y la entrevista pudimos constatar que los resultados obtenidos con referencia al aprendizaje significativo se pudieron identificar en las fases de la actuación y comunicación, esto a que permite su evaluación continua conforme se va desarrollando dicho proyecto.

El impacto han sido los productos alcanzados y la participación que los estudiantes muestran al presentar sus productos, ya que visualizan la conexión existente entre el uso de las matemáticas y su aplicación en un lenguaje de computadora y llevándolos así a una aplicación real.

Consideramos que este trabajo sienta las bases para desarrollar actividades didácticas basadas en estrategias didácticas mediante el proyecto integrador, ofreciendo pistas metodológicas interesantes como son el análisis de matemáticas en uso, la metodología para el diseño de actividades, el involucramiento de profesores de matemática en el diseño en el marco de una investigación donde impacta diversas áreas. Este trabajo consideramos ser el preámbulo de futuras investigaciones que deben generarse para fortalecerlo.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Se considera enriquecedor el que el estudiante pueda tener un escenario donde le permita aplicar diversas técnicas y su desarrollo dentro del aula lo prepare para afrontar situaciones de un contexto real y que este preparado para su ámbito laboral.

REFERENCIAS

[1] Aguilera Cruz, O. y Ruiz de la Peña, J. (2006): Importancia de la Ingeniería de Software en la producción de software. Revista electrónica "Ciencias Holguín" ISSN 1027-2127. htttp://www. ciencias.holguín.cu, número 4.

[2] Díaz Barriga, Frida, Hernández Rojas, Gerardo. (2010). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Tercera edición. Mc Graw Hill.

[3]Gómez P.J., et. al., (2013). Compiladores e instructores, Manual del 4° Diplomado en Desarrollo de Competencias Docentes en Ambiente Colaborativo. Coordinación de Actualización Docente de la Facultad de Química. Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Vallejo, UNAM, México.

[4] Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subject- why? In A. G. Howson et al. (Eds), Mathematics as a service subject. pp.28-34. Cambridge: Cambridge University Press (Series : ICMI study).

[5] Simmons, G. (2007). Ecuaciones diferenciales: Teoría, técnica y práctica. México: McGraw-Hill.

[6] Tejeda, R (2006). La formación profesional por competencias del ingeniero mecánico mediante proyectos de ingeniería. Tesis doctoral, Holguín.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Identificando los errores algebraicos de los alumnos de Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros

Ana María Martínez Blancarte[#]
[#]Benemérita Escuela Nacional de Maestros, Calz México-Tacuba 75, Un Hogar Para Nosotros, 11330 Ciudad de México, D.F.
anismaba@hotmail.com

***Resumen*- La presente investigación se enfoca en álgebra, y tuvo como objetivo identificar los diversos problemas que presentan los profesores en formación en esta materia. En particular muestro los resultados de estudiantes normalistas del tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros. La investigación se llevó a cabo por medio de un instrumento (cuestionario de treinta y dos reactivos) propuesto por [1], cuyo objetivo fue detectar y analizar los errores algebraicos que presentan los estudiantes. Se detectó que el conocimiento de los futuros docentes presenta dificultades importantes, a pesar de ya haber recibido instrucción en la asignatura de álgebra durante el segundo semestre, por lo cual queda como reto consolidar e identificar los errores de instrucción y de aprendizaje para fortalecer los conocimientos especializados que indica el plan y programas de la licenciatura 2012.**

***Palabras clave*- Álgebra, errores, extrapolación, linealidad, instrumento propuesto por Matz, y profesores en formación.**

***Abstract*- This research focuses on algebra, to identify the various difficulties presented by teachers in training. In particular, I present the results of student teachers of the fourth semester of the Bachelor of Primary Education of the National Teachers Benemérita. The research was conducted through a questionnaire (thirty-two reagents) instrument proposed by [1], whose goal was to detect and analyze bugs in algebraic high school students, in my case are training teachers in Education primary. It was found that knowledge of future teachers presents major difficulties despite already having received instruction in the subject of algebra in the second half so the challenge is to consolidate and identify mistakes instructional and learning to strengthen the expertise that indicates the plan and degree programs 2012.**

***Keywords*- Algebra, errors, extrapolation, linearity, instrument proposed by Matz, and teachers in training.**

I. Introducción

En las escuelas normales de la licenciatura en educación primaria se lleva a cabo la Reforma curricular a partir del año 2012, en la que se establece el estudio del Álgebra, su aprendizaje y su enseñanza la cual se trabaja específicamente en el segundo semestre de la licenciatura. La Reforma establece que el conocimiento y la actividad intelectiva de la persona que aprende no sólo residen en la mente de quien aprende, sino que se encuentra distribuida socialmente. Se busca que el docente en formación tenga un desarrollo equilibrado de sus saberes: su saber conocer, su saber hacer y su saber ser. La interacción entre la teoría y la práctica permitirá la transferencia de los conocimientos.

El trayecto formativo de Preparación para la Enseñanza y el Aprendizaje encargado de los saberes disciplinarios, pretende que el docente en formación logre un dominio conceptual e instrumental de las disciplinas, en específico del álgebra que es en la que se llevó a cabo la investigación que se presenta.

En el curso de Álgebra, su aprendizaje y su enseñanza [2] se espera que los futuros docentes fortalezcan sus conocimientos previamente aprendidos para abordar el estudio de conceptos y procedimientos algebraicos que usarán y recrearán en el marco de la resolución de problemas. En específico, el curso desarrolla el concepto de función y refleja en su secuencia la concepción que se adopta para proponer el estudio del álgebra como objeto de aprendizaje para su enseñanza. Es decir, se inicia en lo semántico para llegar a lo sintáctico.

En el estudio las regularidades que presentan los patrones numéricos generados por funciones lineales y cuadráticas, las expresiones algebraicas se nutren de los significados de un contexto numérico, lo que lleva a un acercamiento semántico y conduce a la formulación de conjeturas que orientan la producción de expresiones algebraicas para describir las reglas que generan dichos patrones; permitiendo que los estudiantes asignen significados a las variables involucradas en una función como símbolos "que pueden admitir muchos valores que dependen de otro valor"; a encontrar la "regla que invierte" una función dada permite introducir la noción de ecuación y a usar métodos no convencionales para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. Se considera que los métodos no convencionales para resolver ecuaciones favorecen la lectura e interpretación de las expresiones algebraicas para lograr un objetivo: resolver la ecuación.

También se lleva a cabo la institucionalización de los significados y procedimientos no convencionales a través de acercamientos intuitivos, lo anterior para llegar al estudio de las reglas formales para operar con las expresiones algebraicas involucradas en funciones, ecuaciones y expresiones polinomiales en el contexto de la resolución de problemas.

El curso profundiza el estudio del concepto de función, sus representaciones: algebraica, tabular y gráfica, y los conocimientos matemáticos relacionados con ese concepto por medio de la manipulación y el análisis del

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

comportamiento de las gráficas y los parámetros de varias familias de funciones.
El curso se relaciona con los de aritmética, geometría y estadística que se tienen en el [3]. En aritmética se desarrollan las bases para el estudio del álgebra; en geometría se abordan temas que ofrecen situaciones para posteriores aplicaciones empleando los recursos del álgebra; en álgebra se apoya la comprensión de los conceptos y métodos que se estudian en el curso de estadística.

II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

A lo largo de la educación, los estudiantes de secundaria tienen antecedente nulo para realizar el estudio del álgebra, dado que en la enseñanza primaria sólo se tiene un acercamiento a las letras al trabajar las fórmulas geométricas; sin embargo, no se le da el enfoque algebraico necesario [4], es decir, sólo se enseña al estudiante a tratar esas letras como etiquetas que se refieren a entidades específicas o la inicial de una palabra; sin la introducción a un álgebra temprana.
[4] detectaron que la enseñanza del álgebra escolar surge en la escuela secundaria; al tratar las letras, se espera que los estudiantes aprendan a interpretarlas como números generales, incógnitas o como una función, dependiendo de la expresión o la situación en la que aparecen. Por lo anterior, los estudiantes al enfrentarse a las situaciones algebraicas, ponen en juego su conocimiento aritmético previo, el cual, en ocasiones, les impide asimilar la transición que se presenta al pasar de la aritmética al álgebra; ocasionándoles dificultades.
[1] establece que las dificultades de los estudiantes se deben a la no asimilación de los cambios conceptuales al pasar de la aritmética al álgebra. En diversas ocasiones los educandos resuelven los problemas algebraicos con lo que saben, lo anterior los lleva a cometer errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación.
[1] propone las siguientes categorías para clasificar los errores algebraicos.
1. Errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación.
2. Errores que reflejan un conocimiento básico pobre, aunque correcto.
3. Errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento.
Los errores que tienen que ver con la extrapolación (que es el punto de interés del presente trabajo), son dos:
La linealidad: al trabajar con un objeto, el estudiante, lo descompone tratando independientemente cada una de sus partes. La mayoría de la experiencia previa de los alumnos es compatible con la hipótesis de la linealidad debido a que, en la aritmética, la inmensa cantidad de ocasiones, los estudiantes agregan y utilizan la ley de la distributividad que muy probablemente refuerza la aceptación de la linealidad.

Los errores de extrapolación lineal se clasifican en tres categorías, las cuales se presentan enseguida:

Distribución generalizada: el educando descompone de forma lineal a una expresión algebraica por medio de la distribución de su operador de nivel superior a través de la expresión de sus partes.
Aplicación repetida: si el estudiante identifica que los términos adicionales no son de la misma forma, entonces aplica la regla sólo a los términos que coinciden, y deja de lado a los términos adicionales tal cual está aplicando así la norma de forma selectiva.
n la regla de reconocimiento: Los alumnos realizan un análisis superficial de un prototipo, dicho análisis puede llevar a una formulación de la norma inexacta. Lo anterior sucede cuando el libro de texto e incluso el mismo profesor brindan ejemplos que no son entendidos por los estudiantes por lo cual, éstos inventan una regla que explique cómo funciona el ejemplo.
La generalización: los educandos establecen un puente entre las reglas que conocen y los conocimientos nuevos que van adquiriendo, generalizan reglas a partir de una regla conocida u optan por otras bajo la suposición de la aplicación. Tienen mayor necesidad de generalizar más sobre los números que sobre los operadores, debido a que el álgebra en sí misma, es una abstracción de la aritmética.
Antecede a esta investigación, una similar llevada a cabo en el año 2009 con estudiantes del sexto semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México (ENMS) del turno vespertino, en la que participaron 21 docentes en formación cuyas edades oscilaban entre los 20 y 38 años de edad. En dicha investigación [5] detectaron que:
No sólo a nivel secundario se presentan dificultades con el álgebra, sino también en el nivel superior, en el caso de la Licenciatura de la ENSM.
Los futuros profesores sólo se habían apropiado de reglas o las recordaban y las extrapolaron al aplicarlas a los diversos ejercicios parecidos que se les presentaron, sin darse cuenta del tipo de error que cometían.
Los estudiantes a profesor de la ENSM presentan más errores de linealidad que de generalización al resolver una situación algebraica.
Se debe indagar y mejorar el conocimiento de los profesores para poder encontrar alternativas de apoyo que ayuden a erradicar los errores de extrapolación en los estudiantes de todos los niveles.

III. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVO

Por todo lo anterior, surgió el interés por indagar las siguientes interrogantes:

¿Cuáles son las dificultades de extrapolación algebraica que presentan los docentes en formación de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros al resolver situaciones algebraicas?

¿Qué estudiantes, los docentes en formación de la BENM o de la ENSM, presentan mayor debilidad de extrapolación al resolver situaciones algebraicas?

¿Si se recibe instrucción sobre el álgebra, son menores los errores que presentan los futuros docentes?

Para cumplir el objetivo de identificar los errores de docentes en formación en el aprendizaje del álgebra.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

IV. Metodología de la investigación

Población: la investigación se realizó en la Benemérita Escuela Nacional de Maestros con 20 alumnos (16 mujeres y 4 hombres) de un grupo del tercer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria en el área de Matemáticas, quienes llevaron la asignatura de álgebra, su enseñanza y su aprendizaje en el segundo semestre de la carrera. Sus edades oscilan entre los 18 y 23 años de edad.

19 alumnos de la Escuela Normal Superior de México del quinto semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria en el área de Matemáticas. Sus edades oscilaban entre los 20 y 38 años de edad.

Instrumento: el instrumento metodológico que se empleó para recabar la información fue un cuestionario de treinta y dos problemas algebraicos y serán analizados bajo la clasificación propuesta por [1] de acuerdo a las dos técnicas de extrapolación: la linealidad y la generalización.

Como se dijo, el propósito de la aplicación del instrumento fue identificar los errores algebraicos que presentan los docentes en formación que ya recibieron instrucción, para considerar los resultados en la enseñanza que se llevará a cabo en el siguiente semestre con los educandos que en estos momentos se encuentran en primer año.

V. Resultados

Es importante recordar que, para organizar los resultados, se retomó la clasificación de los errores algebraicos de [1], la cual establece las siguientes tres categorías.

A continuación, se analizaron las respuestas dadas por los alumnos de las dos escuelas, BENM y ENSM, a cada uno de los reactivos, para identificar en qué consistió el error que cometieron los docentes en formación al resolver algunas de las situaciones algebraicas. El análisis que se hace es minucioso en tanto se van describiendo las diversas respuestas dadas en cada reactivo

De acuerdo con [1] en el reactivo 10.-

$$\sqrt{A+B}= \quad \text{(E1)}$$

Sólo un docente en formación de la BENM llegó a la respuesta correcta (E2); mientras que en la ENSM fueron tres los que llegaron a la respuesta correcta.

$$(A+B)^{1/2} \quad \text{(E2)}$$

Se observa que los docentes en formación recuerdan que la operación inversa a la raíz cuadrada de un número se obtiene elevando a un exponente fraccionario la base que se encuentra dentro del signo de la raíz.

$$(A+B) \quad \text{(E3)}$$

Los docentes en formación de ambas escuelas olvidaron que el resultado debería ser (E4), no recordaron que al ser raíz cuadrada deben considerarse los dos resultados posibles.

$$\pm(A+B)^{1/2} \quad \text{(E4)}$$

Un futuro profesor consideró como respuesta (E5) confundiendo que la operación inversa a la raíz cuadrada de un número se obtiene elevando al cuadrado la base de la raíz.

$$A2 + B2 \quad \text{(E5)}$$

Tres de los futuros profesores cometieron un error de distribución generalizada, dado que el operador es interno, el estudiante en formación recuerda que (E6) es igual a multiplicar (E7) por (E8) y dan como resultado (E9), pero no identifican que lo anterior es incorrecto dado que lo que se está trabajando es la suma y no la multiplicación.

$$\sqrt{(AB)} \quad \text{(E6)}$$

$$\sqrt{A} \quad \text{(E7)}$$

$$\sqrt{B} \quad \text{(E8)}$$

$$\sqrt{AB} \quad \text{(E9)}$$

Un docente en formación infiere que

$$\sqrt{A+B}= \sqrt{A}+\sqrt{B}. \quad \text{(E10)}$$

Dado que recuerda que (E11) es igual a multiplicar (E12) por (E13) y dan como resultado $\sqrt{AB}$, el estudiante normalista tiene un error de distributividad de un operador haciendo referencia al otro operador involucrado en la acción.

$$\sqrt{(AB)}= \quad \text{(E11)}$$

$$\sqrt{A} \quad \text{(E12)}$$

$$\sqrt{B} \quad \text{(E13)}$$

En este caso el operador $\sqrt{\ }$ se distribuye con respecto a la multiplicación pero no con respecto a la adición. Esta fue la respuesta que más se presentó en los normalistas de la ENSM.

Un docente más, propone como respuesta (E14), omitiendo el signo de raíz y confundiendo nuevamente que el operador es interno y realiza la multiplicación de las literales. AB (E14)

Dos normalistas más identifican como respuesta (E15) pues recuerdan que la suma de dos números naturales da como resultado un número natural.

$$\sqrt{1}, \sqrt{C} \quad \text{(E15)}$$

Un normalista da como resultado un número fraccionario (E16), pero no recuerda que el que debe ser fraccionario es la potencia por medio de la cual se puede eliminar el signo de raíz.

$$\frac{4}{2} \quad \text{(E16)}$$

Otro docente en formación, sólo pasó tal cual el reactivo, sin realizar nada

$$\sqrt{A+B} \quad \text{(E17)}$$

Seis normalistas dejaron en blanco el reactivo.

Dado lo anterior, se encuentra que el 94.5 % de los estudiantes a profesor presentan errores de linealidad enfocados en la distribución generalizada, pues hicieron uso de técnicas que recordaban, las cuales fueron establecidas a lo largo de su vida educativa, sin embargo, no fueron las pertinentes y terminaron adecuándolas a su conveniencia para poder solucionar las situaciones algebraicas que se les presentaron.

En el reactivo 16, nuevamente se presenta el problema obtenido en el caso anterior y prácticamente en la misma proporción, siendo el 94.5 % el que presenta debilidades para poder solucionar las situaciones que se les plantearon y el 5.5 % obtuvo una respuesta correcta.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Un docente en formación coloca como respuesta (E18)

$$2a + 2b \quad \text{(E18)}$$

Se observa que, por tener el signo de suma en los exponentes, los coeficientes también los sumaron, esto puso de relieve que la distributividad no debe identificarse sólo como operador.

Dos normalistas, realizan algo similar a lo anterior, sólo que cambian el signo de suma por el de multiplicación (E19)

$$2^{ab} \quad \text{(E19)}$$

Sólo un futuro docente de la BENM escribió que (E20) aquí, se observa la aplicación correcta de las reglas algebraicas colocando la misma base (que es un número natural) en una multiplicación y los exponentes a y b respectivamente.

$$2a+b = (2a)\,(2b) \quad \text{(E20)}$$

En la ENSM, ocho docentes en formación llegaron a la respuesta adecuada.

Un docente en formación equivoca su respuesta colocando (E21), refiriendo un error de linealidad, pues recuerda que la suma de dos números naturales se suman, por lo cual, sólo opera los exponentes y repite la base.

$$2^c \quad \text{(E21)}$$

Otro docente, traspola igual el ejercicio sin resolverlo (E22).

$$2^{a+b} \quad \text{(E22)}$$

Uno de los estudiantes en formación, realiza la operación contraria a la suma que se establece en los exponentes (E23).

$$2^{a-b} \quad \text{(E23)}$$

Dos más realizan la multiplicación de la base por el exponente llegando a la respuesta (E24)

$$2A + 2B \quad \text{(E24)}$$

Un docente en formación registró (E25), lo que nos lleva a suponer que a cada exponente le puso como base el número 2, los sumó, obteniendo el cuatro y colocó los exponentes como base, pero multiplicándolos.

$$4AB \quad \text{(E25)}$$

Un normalista escribió como respuesta (E26), lo que nos lleva a suponer que a cada exponente le colocó como base el 2; a a y b las incluyó en las bases sin modificarlas, a las bases que originó, les puso el exponente 2 que retomó de la base original.

$$2a^2 + 2b^2 \quad \text{(E26)}$$

Siete normalistas se abstuvieron de contestar.

Se puede concluir que los normalistas de la BENM presentan mayores dificultades para poder resolver estos planteamientos algebraicos, en comparación con los estudiantes de la ENSM. Los futuros docentes de la BENM recurren más a la aplicación de reglas conocidas y trabajadas en aritmética que en las algebraicas.

Otro ejemplo de error de extrapolación lineal se observó en el ejercicio 18, se solicitó simplificar la expresión (E28); y en las respuestas que dieron se pudo observar que:

$$\frac{Ax+By}{x+y} \quad \text{(E28)}$$

Tres docentes en formación separaron el denominador en dos partes, eliminaron la variable x, pero siguieron manteniendo como único denominador a y, obteniendo así (E29) sólo un normalista mantiene la x en uno de los numeradores que es la B, (E30) en estas respuestas se observa que los docentes en formación utilizaron la regla de manera inapropiada, dado que el denominador no se debe separar, lo anterior, sólo es posible en el numerador; por lo que se ve que aplicaron una regla incorrecta de cancelación (E31) a cada literal.

$$\frac{A+B}{y} \quad \text{(E29)}$$

$$\frac{A+Bx}{y} \quad \text{(E30)}$$

$$\left(\frac{Ax}{x} = A \text{ y } \frac{By}{y}\right) = B \quad \text{(E31)}$$

Un normalista, sólo trasladó el ejercicio sin realizar ningún cambio; seis se abstuvieron de contestar.

Uno solo cambió las literales x, y por c, d en el denominador y multiplica cada denominador por cada numerador obteniendo como respuesta (E32)

$$AC + AD + BC + BD. \quad \text{(E32)}$$

Otro normalista llega a la respuesta de (E33), eliminó del denominador a la x multiplicándola por los numeradores, sin embargo, en Bx, la pasa igual y agrega como suma la y del denominador. Recordando así, que la operación contraria a la división es la multiplicación; aunque recuerda que al multiplicar dos bases iguales se tiene el cuadrado de dicha base, lo que refleja un conocimiento pobre de la información, se aplica la operación inversa a la adición que es la sustracción.

$$Ax2\text{-}Bx + y \quad \text{(E33)}$$

Otro futuro profesor en formación realiza lo mismo, sólo que en este caso la que tiene la base x al cuadrado es B, (E34), en ambos términos mantiene el signo de adición. Un tercer estudiante realiza algo muy similar a lo descrito anteriormente, sin embargo, él prefiere dejar expresada la respuesta como (E35).

$$Ax+Bx2 + y \quad \text{(E34)}$$

$$Ax2\text{-}Bxy \quad \text{(E35)}$$

Otro ejemplo de la aplicación de la propiedad del neutro aditivo en el numerador y el denominador, lo anterior es una regla de aritmética. La respuesta que escribió el normalista fue (E36)

$$\frac{(A+B)(x+0)}{(x+y)(1+0)}. \quad \text{(E36)}$$

Un docente en formación, sólo sumó los exponentes de la x sin importar que estuvieran en el numerador o en el denominador, la suma de(E37), sólo la expresa como C, pues sabe que la suma de dos números (E38) es igual a un tercer número natural y suma el denominador y, obteniendo así la respuesta (E39).

$$A + B \quad \text{(E37)}$$

$$(a + b) \quad \text{(E38)}$$

$$Cx^3 + y. \quad \text{(E39)}$$

Otro futuro profesor, cambia de orden los numeradores y los multiplica por la raíz de los denominadores (E40)

$$ABxy\ \sqrt{xy}. \quad \text{(E40)}$$

En la totalidad de las respuestas dadas por los normalistas de la BENM, se observa una forma primitiva de aplicar las reglas que según [1] subyacen en muchas extrapolaciones en las cuales los operadores pueden ser lineales o no lineales.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

En el ejercicio 29 se presenta el segundo grupo de errores de linealidad, referido a la aplicación repetida. Se aplica un operador independientemente a cada uno de los términos de la expresión.

Un estudiante da valor de 1 a cada uno de los denominadores y al dividir la fracción $\frac{1}{1}$, es igual a 1. Otro hace lo mismo pero lo deja expresado de la siguiente manera $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$, uno más hace lo mismo, pero suma el denominador o la igualación para obtener como respuesta 2.

Un estudiante normalista, elimina los unos y sólo suma los subíndices para obtener como resultado 6.

Dos normalistas más, hacen procedimientos parecidos pues obtienen como respuesta (E41) y (E42) el primero, sólo suma las R obteniendo así el exponente 4, el otro suma los subíndices y por ello llega al exponente 6.

$$\frac{3}{R^4} \quad \text{(E41)}$$

$$\frac{3}{R^6} \quad \text{(E42)}$$

Un tercer normalista hace lo mismo, pero deja como numerador al 1, su respuesta fue (E43).

$$\frac{1}{R^6}. \quad \text{(E43)}$$

Un normalista más, sólo suma los subíndices de la R y respeta la igualación, dejando la suma expresada, sin resolverla (E44).

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \quad \text{(E44).}$$

Los docentes en formación aplican más las reglas aritméticas que conocen, algunos las transforman para poder dar solución a las situaciones planteadas. [1] detectó que lo anterior se puede evitar al re-escribir el ejercicio ajustándolo a una regla conocida y resolverlo como una fracción igualada a otra fracción. Posteriormente, se encontraría un común denominador; por último, se agruparía la suma de fracciones en una sola fracción como se muestra en la siguiente respuesta que dio uno de los normalistas de la ENSM

$$\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_2}. \quad \text{(E45)}$$

En todas las respuestas dadas por los estudiantes de la BENM, se pudo detectar que el conocimiento previo de los docentes en formación es importante para poder analizar y resolver el reactivo 9, que, si bien recordaban varias reglas aritméticas, no las aplicaron correctamente, presentando así, debilidades en el paso de la aritmética al álgebra.

La segunda técnica de extrapolación, según [1], es la generalización. Dicha categoría fue indagada a través de los reactivos 2, 6 y 24. La técnica de la generalización, suele ser un puente entre las reglas conocidas y los ejercicios nuevos.

En estos ejercicios que se les presentaron a los normalistas, fue más frecuente la generalización sobre números que sobre operadores, de acuerdo a la estructura misma del álgebra.

En el reactivo 2 (E46), entonces (E47), doce normalistas de la BENM, llegaron a la respuesta correcta (15) y en la ENSM, fueron catorce.

si x = -3 & y = -5 (E46)

xy =) (E47)

Lo anterior, demuestra que la mayoría de los normalistas han establecido las reglas que recuerdan y las han aplicado correctamente como lo solicita la situación algebraica presentada.

Tres normalistas realizan el mismo procedimiento que los estudiantes anteriores, sin embargo, al aplicar la ley de los signos en la multiplicación, lo hacen como suma, llegando así, a la siguiente respuesta -15.

Tres futuros docentes registraron como resultado -8, esto, permite observar que los normalistas tienen un conocimiento básico y aplicaron una extrapolación de las reglas.

Sólo un docente en formación, únicamente escribió los números (-3-5) con todo y signo del ejercicio que se les presentó, pero no lo resolvió.

En las soluciones que se presentaron anteriormente, se observa cómo la mayoría de los normalistas aplican la regla correcta y otros se confunden utilizando reglas aritméticas en lugar de las algebraicas.

En el reactivo 6, se presenta otro error de generalización, en el cual los futuros docentes debían de simplificar (E48)

3x +4xz. (E48)

Ocho docentes en formación de la ENSM, simplificaron el ejercicio de manera correcta obteniendo como respuesta (E49) demostrando así, que recordaron sin problema las propiedades establecidas y sólo las aplicaron.

x (3+4z) (E49)

Ningún alumno de la BENM obtuvo la respuesta correcta. El estudiante de la licenciatura en educación primaria que más se acercó a la respuesta correcta, escribió (E50), lo anterior dejó ver que el normalista se equivocó al aplicar el neutro aditivo al segundo término por lo que no llegó a la respuesta correcta.

(3+4z) (x+0) (E50)

Un normalista registró (E51). Lo que se observó en este reactivo, es que el docente en formación sólo igualó la expresión a cero, pues recordó que una operación debe tener un signo igual para tener solución. Es decir, realizó una transferencia de su conocimiento aritmético al algebraico.

3x + 4xz = 0 (E51)

Cuatro docentes en formación escribieron (E52)

7xz (E52)

Los futuros docentes llevaron a cabo la adición de los números, pero concatenaron las literales. Lo anterior refleja un conocimiento sobre las operaciones que aprendieron en aritmética, pero no de las algebraicas.

Cuatro normalistas escribieron como respuesta (E53)

$7x^2z$ (E53)

Se observa que realizaron la adición de los números y concatenaron las literales y la x la elevaron al cuadrado, lo anterior, permite identificar que los futuros docentes recuerdan que cuando una misma literal aparece dos veces en un sólo término, ésta se puede escribir elevada al cuadrado.

Un estudiante registró como respuesta (E54), se puede mencionar que el normalista suma los números, pero a él le dan 8, multiplica las x, recordando así, que cuando una misma literal aparece dos veces en un sólo término, ésta se puede escribir elevada al cuadrado.

8x2z (E54)

Otro normalista escribió como respuesta (E55), se puede observar que al igual que el estudiante anterior, éste, multiplica las x, recordando así, que, si una misma literal

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

aparece dos veces en un sólo término, ésta se puede escribir elevada al cuadrado; pero también multiplica los números para obtener así el 12.

12x2z (E55)

Un normalista no realiza nada en el ejercicio y sólo lo transcribe (E56)

3x+4xz (E56)

Cinco normalistas no contestaron la situación algebraica planteada.

En este reactivo, se concluye que es necesario asimilar sintáctica y semánticamente las expresiones algebraicas, aceptando que la x y la z representan un número.

VI. Conclusiones

Como se pudo observar a lo largo del análisis de las repuestas a las tres preguntas planteadas al inicio, se llegaría a las siguientes conclusiones:

Con respecto a las dificultades de extrapolación algebraica, se observó que los docentes en formación de la BENM presentan mayor debilidad en los ejercicios de linealidad y menos en los de generalización, sobre todo en el caso del reactivo 2, que tuvo un 66.6 % de respuestas correctas.

Los estudiantes de la BENM presentan mayor dificultad tanto en linealidad como en generalización al resolver las situaciones algebraicas que se les presentaron. En linealidad, sólo dos estudiantes tuvieron un reactivo correcto de los cuatro analizados.

A pesar de haber tenido instrucción sobre álgebra, en el caso de los normalistas de la BENM, no se han erradicado los errores de linealidad y de generalización que presentan los futuros docentes.

Es necesario y urgente, reconsiderar la enseñanza del álgebra que se lleva a cabo en la Licenciatura de Educación Primaria para mejorar los resultados obtenidos en la presente investigación y elevar el nivel académico de los estudiantes normalistas.

REFERENCIAS

[1] Matz, M. (1982). Towards computational theory of algebraic competence. Journal of Mathematical Behavior. 3 (1), 93-166.

[2] SEP (2012). Curso: Álgebra, su aprendizaje y su enseñanza. México.

[3] SEP (2012). Plan y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012. México.

[4] Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., Trigueros, M. (2005). Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa. (1° Ed.), México: ANPM, Trillas.

[5] Hernández, M. y Martínez, A. M. (2011). Errores algebraicos que cometen los profesores en formación. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo y disponibilidad a los estudiantes de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros y de la Escuela Normal Superior de México por su participación en la investigación.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Resolución de problemas sobre optimización sin cálculo con estudiantes de bachillerato: una experiencia de enseñanza

Saúl Elizarrarás Baena[#]
[#]Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201, Col Ex-Hacienda el Rosario, Azcapotzalco, 02430 Ciudad de México
sauleliba@gmail.com

Resumen. **Este estudio cualitativo coincide con la postura de [1] y [2]. Su objetivo fue interpretar la intervención de la enseñanza en función de los conocimientos previos y del desarrollo de habilidades matemáticas de estudiantes de bachillerato para resolver problemas relacionados con la optimización sin cálculo. Dadas las circunstancias, la el docente procedió a plantear preguntas guía [3] al realizar en forma grupal con los estudiantes una primera actividad (hipotética), la cual consistía en resolver problemas referidos a situaciones y contextos relacionados con el entorno del municipio de residencia de la mayoría de los estudiantes. De esta manera, sus conocimientos previos fueron nulos u olvidados [4]; así como escaso nivel de desarrollo sobre habilidades matemáticas, principalmente, para expresar algebraicamente los datos de un problema y efectuar los procedimientos correspondientes. Respecto a la enseñanza, de modo ineludible, excluía por momentos su función de mediador.**

Palabras Clave- **Conocimientos previos, enseñanza, habilidades matemáticas, optimización.**

Abstract- **This qualitative study coincides with the position of [1] and [2]. The main objective was to interpret the intervention of teaching based on previous knowledge and the development of mathematical skills of high school students to solve problems related to the optimization without calculation. Under the circumstances, the teachers proceeded to ask questions guide [3] when performing in groups with students a first activity (hypothetical), which was to solve problems related to situations and contexts related to the environment municipality of residence of most students. their previous knowledge were null or forgotten [4]; and low level of development of mathematical skills, primarily to express algebraically data problem and make the corresponding procedures. Regarding teaching, inescapable way, excluded at times his role as mediator.**

Keywords- **Previous knowledge, teaching, mathematical abilities, optimization.**

I. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo se describe e interpreta una propuesta de enseñanza relacionada con problemas de optimización sin cálculo, con alumnos de quinto semestre de bachillerato general del Gobierno del Estado de México (GEM). En principio, se presentan los aspectos atendidos en el marco del enfoque por competencias tanto las correspondientes para el docente como para los alumnos, mediante los cuales se enmarcó la práctica docente. Posteriormente, se presentan los hallazgos que se derivaron de la interacción docente con los alumnos, para lo cual se tuvo que poner en práctica de modo específico una de las habilidades docentes básicas que proponen [3] relacionada con la formulación de preguntas para guiar el aprendizaje de los alumnos.

En este estudio de carácter cualitativo [1], se asumió como enfoque metodológico a la etnografía educativa en términos de la postura de [2] y cuya técnica predominante fue la observación participante.

II. PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA

Cabe señalar que la resolución de problemas de optimización sin cálculo es un tema propuesto en la curricula oficial de bachillerato general dependiente del subsistema estatal de nivel medio superior de la Secretaría de educación (SE) del Gobierno del Estado de México [5], el cual se adscribe al acuerdo 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato [6]. Asimismo, es un tema del campo disciplinario de Matemáticas correspondiente a la materia de Cálculo Diferencial; se ubica en la primera (macroretícula: Unidad I. Problemas de optimización sin Cálculo) de cuatro unidades del programa oficial, conforme a la mesoretícula que se específica a continuación:

1.1. Representación y Solución Numérica.
1.2. Representación y Solución Gráfica.
1.3. Representación y Solución Simbólica o Algebraica.

Aunado a lo anterior, se proponen cuatro competencias disciplinares básicas [5]:

1.- Ordena información de acuerdo a categorías y relaciones en problemas de optimización.
2.- Identifica principios o reglas medulares que subyacen en el problema de optimización.
3.- Construye, diseña y aplica modelos para probar su validez.
4.- Sintetiza evidencias obtenidas mediante el planteamiento de problemas de optimización.

En el Acuerdo 486 se establecen las competencias disciplinares extendidas para bachillerato general [7], de las cuales podrían relacionarse las siguientes:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Conforme a lo que se ha especificado hasta aquí, se espera que los alumnos resuelvan problemas sobre optimización de forma autónoma mediante la formulación de procedimientos informales y formales que permitan la representación numérica, gráfica y simbólica o algebraica.
Otro aspecto que se toma como punto de referencia son las competencias docentes que deben desarrollarse para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada, las cuales se encuentran estipuladas en el acuerdo 447 [8] y que en este caso, se puede encontrar relación con las siguientes:

2. Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.
3. Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.
4. Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.
5. Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.
6. Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
Previo a la aplicación de esta propuesta de enseñanza se proporcionó a los estudiantes una lista de ocho problemas cuyo procedimiento de resolución implicaba, en principio, el planteamiento de dos ecuaciones con dos incógnitas y de su relación se obtenía una ecuación cuadrática.

Cabe señalar que en el presente artículo se describen, interpretan y analizan algunos hallazgos con la estrategia de enseñanza instrumentada, previo a su aplicación.
En el diseño de la propuesta se previó que se generaran ambientes de aprendizaje que permitieran a los alumnos expresarse y comunicarse, lo cual se encuentra plasmado en la competencia genérica [6] siguiente:

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
   - Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
   - Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
   - Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
   - Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

Asimismo, se atendería la necesidad de que los alumnos piensen de forma crítica y reflexiva, lo cual concuerda con las competencias genéricas 5 y 6 [6]:

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   - Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
   - Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
   - Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
   - Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
   - Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
   - Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
   - Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
   - Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
   - Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Otro aspecto que se había previsto fue la que refiere al aprendizaje autónomo; en este sentido, no sólo interesaba que los estudiantes se hicieran responsables de su propio aprendizaje sino la posibilidad que se generaba para que pudieran reconocer que las Matemáticas tienen aplicaciones en distintas ramas de las ciencias naturales como lo es el caso de la Biología; de un modo específico, se previó la inclusión de la competencia genérica y atributos respectivos que se citan a continuación [6]:

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
   - Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
   - Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
   - Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

En este sentido, los hallazgos reportados de un estudio de exploración, se han caracterizado en que los alumnos presentaron ausencia de comprensión sobre conceptos y procedimientos implicados con la variación y la proporcionalidad [9] y más recientemente, se ha identificado la falta de conocimientos previos y bajo desarrollo de habilidades geométricas y algebraicas para la resolución de problemas que implican el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y cuya relación implica la resolución de una ecuación cuadrática [10]; bajo estas circunstancias la enseñanza se enfocó en formular preguntas para guiar a los estudiantes en el planteamiento y resolución del procedimiento correspondiente, conforme a lo que sugiere [3].

Por último, se había previsto que los alumnos pudieran trabajar de forma colaborativa y así, desarrollaran la competencia genérica [6]:

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
   - Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
   - Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
   - Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Finalmente, no menos importante resultaba incluir la competencia genérica relacionada con la participación en sociedad de forma responsable; en este caso, se previó que los alumnos pudieran visualizar en una situación hipotética los beneficios que se pueden obtener al desarrollar un proyecto relacionado con la reforestación de un terreno y de este modo, movilizar el fomento de atributos como la sustentabilidad del medio ambiente y sobreponer el interés común ante intereses particulares que tanto daño le han causado al país a lo largo de su historia; en particular, se idealiza en la situación y contexto planteado la conformación de una sociedad cooperativa para administrar los recursos económicos. De modo específico, se previó la inclusión de las competencias genéricas 9 y 11 [6]:

9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
   - Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.
   - Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.
   - Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.
   - Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.
   - Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.
   - Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.
   - Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.
   - Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.
   - Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.

III. INTERPRETACIÓN DE HALLAZGOS

En principio, se pidió a los alumnos que se reunieran en equipos de tres personas para que en lo general se pudiera atender la competencia genérica 8 y de este modo, propusieran de un modo más sistemático un procedimiento de resolución, lo cual implicaba la posibilidad de que se atendieran las demás competencias genéricas citadas. En particular, en el marco de competencia genérica número 7, se indicó a los alumnos que resolvieran el primer problema, pero luego de transcurridos veinte minutos, los alumnos "exigían" al docente la explicación y el ejemplo, para que ellos pudieran resolver los demás problemas.

Bajo estas circunstancias, se procedió a guiar la resolución del primer problema tomando en cuenta las sugerencias de [3]. La actividad en general fue diseñada por el propio investigador, la cual fue situada de forma hipotética en el entorno del municipio en el que la mayoría de los estudiantes se desenvolvían, a saber:

1) Los ejidatarios del municipio de Chicoloapan, le donaron a la comunidad estudiantil de la EPO 143 un terreno para su reforestación con la condición de que construyeran la cerca o barda en una superficie de 625 metros cuadrados, cuya forma podían ellos elegir como mejor conviniera a sus necesidades e intereses.

a) Completen los datos de la tabla 1.

Tabla 1.

Base (b)	Altura (a)	Área (A = (b)(a)	Perímetro (P = 2a + 2b)
2		A = (2)(___)	P = (2)(___) + (2)(___)
4		A = (4)(___)	P = (2)(___) + (2)(___)
6		A = (6)(___)	P = (2)(___) + (2)(___)
8		A = (8)(___)	P = (2)(___) + (2)(___)
10		A = (10)(___)	P = (2)(___) + (2)(___)

b) ¿Cuáles deben ser las medidas del terreno para que la cerca requerida sea la menor posible?

c) El metro de cerca tiene un costo aproximado de $25.75, ¿cuál es la cantidad de dinero que requieren para bardear el terreno?

Una primera pregunta que formuló el docente fue la siguiente: ¿Cuáles pueden ser algunas medidas que puede asignársele al terreno de tal modo que el área sea de 625 metros cuadrados?

Debido a que no hubo respuesta de los estudiantes (E_n, n: refiere al estudiante que participó conforme al número que se le asignó), el docente (D) pidió a los alumnos que completaran los datos de la tabla 2 (prevista en el diseño) para que pudieran identificar algunos posibles resultados del problema:

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Tabla 2.
RELACIÓN DEL ÁREA Y PERÍMETRO EN FUNCIÓN DE LAS MEDIDAS DEL CUADRILÁTERO.

Base (b)	Altura (a)	Área (A = (b)(a)	Perímetro (P = 2a + 2b)
2	**312.5**	A = (2)(**312.5**) A = 625	P = (2)(**312.5**) + (2)(**2**) P = 625 + 4 = 629
4	**156.25**	A = (4)(**156.25**) A = 625	P = (2)(**156.25**) + (2)(**4**) P = 312.5 + 8 = 320.5
6	**105.0125**	A = (6)(**105.01**) A = 625	P = (2)(**105.01**) + (2)(**6**) P = 210.25 + 12 = 222.25
8	**78.125**	A = (8)(**78.125**) A = 625	P = (2)(**78.12**) + (2)(**8**) P = 156.25 + 16 = 172.5
10	**62.5**	A = (10)(**62.5**) A = 625	P = (2)(**62.5**) + (2)(**10**) P = 125 + 20 = 145

De forma específica, en el siguiente pasaje se muestra la intervención del docente y las respuestas que fueron proporcionadas por los alumnos. En un principio, hubo quienes sí pudieron identificar la relación del perímetro respecto a la base del cuadrilátero (A_2); no obstante, hubo quien propuso que el perímetro debía ser nulo (A_6), lo cual no tenía sentido para la resolución del problema y además, conforme a la variación inversamente proporcional que mantenía la base respecto a la altura el cálculo del perímetro encontraría un valor mínimo e inmediatamente aumentaría naturalmente. La explicación citada fue omitida por el docente y en cambio, continuo con el planteamiento de preguntas guía, tal y como sugiere [3].

D: ¿Qué sucede con la base respecto a la altura?

A_2: La base sube mientras que la altura baja?

D: ¿Y qué ocurre con el perímetro conforme la base va aumentando?

A_2: Va disminuyendo.

D: Bien. Entonces, ¿cómo vamos a dar respuesta a la pregunta del inciso b [b) A partir de los datos de la tabla, ¿cuáles son las dimensiones que requieren menor cantidad de cerca?]

A_6: Llenar la tabla hasta que el perímetro sea cero.

D: ¿Será posible que el perímetro sea cero? [No hubo respuesta de parte de los alumnos] Bueno, continúen llenando la tabla y cuando terminen me dicen si alguien obtiene cero; posteriormente, tracen una gráfica en la que la base sea el eje de las abscisas y el perímetro las ordenadas. (Transcurrieron aproximadamente veinte minutos para que terminara uno de los equipos].

A20: Ya terminamos.

D: ¿Cuánto obtuvieron para la base y cuanto para la altura?

A_{20}: Debe valer veinticinco cada uno.

D: Entonces, ¿cuánto debe valer el menor perímetro?

A_{20}: Cien.

D: ¿Obtuvieron algún valor igual a cero para el perímetro?

A_{20}: No se puede, pues mientras uno aumenta (se refirió a la base] el otro disminuye] y esto se empieza a invertir cuando llegamos a cien [Se refirió al perímetro].

D: ¿Queda claro lo que dice su compañera?

A_t: Sí. [Contestaron algunas (os) estudiantes].

D: Bien. Ahora, el inciso c) El metro de cerca tiene un costo aproximado de $25.75, ¿cuál es la cantidad de dinero que requieren para bardear el terreno?

A_{32}: Nosotras multiplicamos los cien metros del perímetro por el precio de cada metro de cerca [veinticinco punto setenta y cinco pesos] y nos dio dos mil quinientos setenta y cinco pesos.

A continuación, el docente les proporcionó otra hoja en la cual propuso otro problema que se derivaba del anterior; como a la clase sólo le restaba escasos quince minutos y los alumnos se encontraban copiando la información del pizarrón, el docente les pidió que lo resolvieran de tarea para que al otro día pudieran comunicar sus estrategias de resolución.

2) Los estudiantes de la EPO 143 han decidido en asamblea plantar árboles frutales en el terreno cuya área es de 625 metros cuadrados. Para administrar los recursos, se han conformado en una sociedad cooperativa y como parte de un proyecto de Biología pudieron informarse sobre lo siguiente: un árbol produce un aproximado de 600 manzanas al año cuando se plantan 20 árboles en una superficie de 100 m^2 y por cada árbol plantado de forma adicional, la producción decrece en aproximadamente 15 manzanas.

a) Organicen la información en una tabla para que puedan dar respuesta a cada uno de los incisos posteriores y tracen una gráfica para que puedan anticipar los resultados solicitados.

b) Para que se obtenga la mayor producción de manzanas, ¿cuántos arboles deben plantarse por cada 100 m^2?

c) ¿Cuántos arboles deben plantarse en 625 metros para obtener la mayor producción de manzanas?

d) Cada árbol les costó $85 y un promedio de seis manzanas hacen un kilogramo. ¿Será rentable reforestar con árboles frutales?

Desafortunadamente, al siguiente día que se les pidió que algún alumno pasara a resolver el problema en el pizarrón, dijeron no haber entendido como iban a organizar los datos en una tabla y mucho menos formular el planteamiento algebraico, por lo que volvieron a insistir que fuera el docente quien lo explicara de forma directa, por lo que la autonomía se encontraba todavía ausente; incluso, hubo quien manifestó que por eso se le paga al profesor. De este modo, el docente desarrollo la resolución del problema mediante preguntas guía. En principio, escribió en el pizarrón la tabla 3:

Tabla 3
FORMATO INICIAL DE LA TABLA DE DATOS

Arboles	Frutos	Producción anual
20	600 (20) =	600(20)(6.25) =
21		
22		
23		

De forma casi simultánea, el docente les formulaba preguntas a partir de la información incluida en el texto del problema mismo; es aquí donde algunos alumnos que anteriormente no intervenían, comenzaron a participar con respuestas concretas pero correctas:

D: Para llenar la primera columna, ¿cuántos árboles pueden ser plantados en 100 metros cuadrados?

A_{11}: Veinte.

D: Ah, pues veinte voy a escribir en la primera columna. Ahora, ¿cuántos frutos se podrán recolectar en esos cien metros cuadrados?

A_{11}: Seiscientos.

D: Pero son veinte árboles.

A_2: Se tiene que multiplicar seiscientos por veinte.

D: ¿Cuánto es?

A_2: Doce mil.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

D: Si en cien metros cuadrados se pueden recolectar doce mil manzanas en un año, ¿cuántas manzanas se obtendrán en seiscientos veinticinco metros cuadrados? [No hubo respuesta de parte de los alumnos] A ver, ¿cuántas manzanas dijimos que se obtendrán en cien metros cuadrados?
A_6: Veinte.
A_{11}: No, esos son los árboles.
A_6: ¡Perdón¡ Seiscientos.
D: Bien. Ahora, si fueran doscientos metros cuadrados [Interrumpe un alumno].
A_7: El doble.
D: El doble. Si fueran trescientos metros cuadrados [Vuelve a interrumpir el alumno].
A_7: El triple.
D: El triple. Entonces, ¿qué debemos hacer para calcular las manzanas totales de los seiscientos veinticinco metros cuadrados?
A_7: Multiplicar por seis.
D: Si sólo multiplicamos por seis, ¿cuántos metros de terreno estamos considerando?
A2: Seiscientos cerrados.
D: Entonces, ¿por cuánto debemos multiplicar?
A2: Por seis punto veinticinco.
D: ¿Por qué por seis punto veinticinco?
A2: Porque punto veinticinco representa una cuarta parte.
D: Bueno, sí representa la cuarta parte, pero de qué representa esa cuarta parte.
A2: De cien metros cuadrados.
D: ¿Queda claro lo que dice su compañero?
A_t: Síií. [Se escucha la voz de algunos alumnos]
D: Bien. ¿Cuál va a ser el resultado?
A_2: Setenta y cinco mil. [El docente escribió en el pizarrón: 600(20)(6.25) = 12000(6.25) = 75000].
D: Ahora, ¿qué pasa si aumentamos un árbol, es decir, si se plantan veintiuno en un espacio de cien metros cuadrados?
A_6: Van a disminuir las manzanas y ya no va a convenir.
D: ¿Están de acuerdo con su compañera?
A_{37}: Eso fue lo que me confundió por eso no hice la tarea.
D: ¡Alguien que nos quiera ayudar! [No contestan]. A ver, vamos a completar la siguiente fila para que vean lo que ocurre. De entrada, se podría suponer que la producción va a disminuir, vamos a ver si rechazamos o aceptamos la hipótesis. Lo voy a representar en la segunda columna como la diferencia de 600 menos uno por quince [Interrumpe una alumna].
A_{20}: ¿Por qué por uno?
D: ¿Qué relación podrá tener el uno con el veintiuno de la primera columna? [Señala el veintiuno que corresponde a los arboles de la segunda fila].
A_{20}: Creo que es el árbol que se aumentó.
D: Sí y ese árbol que se aumenta o bien, que se planta de forma adicional; ¿en qué va a afectar el resultado de aquí [Se refiere a la segunda fila de la segunda columna].
A_{20}: Nos va a dar quinientos ochenta y cinco. Pero, entonces ¿para qué multiplicamos si nada más restamos quince y ya?
D: Sí estoy de acuerdo contigo, pero es importante que lo vayamos sistematizando desde el principio, ya más adelante nos vamos a dar cuenta por qué debemos hacerlo así. Entonces, ¿Cuál va a ser el resultado de la producción anual?
A_{23}: Setenta y seis mil, setecientos ochenta y uno.
D: ¿Qué podemos decir del resultado? [No hay respuesta] ¡Compárenlo con el resultado anterior!
A_{20}: Aumento la producción.
D: Entonces, ¿aceptamos o rechazamos la hipótesis?
A_6: La rechazamos.
D: Alguna duda hasta aquí.
A_t: No.
D: Van a continuar completando la tabla en equipo, tomen en cuenta que ahora lo van a hacer con veintidós árboles y así sucesivamente.
A_{20}: ¿Hasta qué número?
D: Tomen en cuenta que buscamos el número de árboles que nos dé la mayor producción de manzanas.
A_{20}: Pero va a estar muy largo.
D: Empiecen con los primeros trece para que vean qué sucede.

Luego de transcurridos veinte minutos, se pidió a algunos alumnos que pasaran al pizarrón a completar los datos que se muestran en la tabla 4 y posteriormente, se reanudó la interacción entre docente y estudiantes.

Tabla 4
TABLA COMPLETADA POR LOS ALUMNOS EN EL PIZARRON

Arboles	Manzanas	Producción anual
20	600(20) = 12000	12000(6.25)=75000
21	[600 – 15(1)][21]= [585][21]= 12285	12285(6.25)=76781.2
22	[600 – 15(2)][22]= [570][22]= 12540	12540(6.25)=78375
23	[600 – 15(3)][23]= [555][23]= 12765	12765(6.25)=79781.2
24	[600 – 15(4)][24]= [540][24]= 12960	12960(6.25)=81000
25	[600 – 15(5)][25]= [525][25]= 13125	13125(6.25)=82031.2
26	[600 – 15(6)][26]= [510][26]= 13260	13260(6.25)=82875
27	[600 – 15(7)][27]= [495][27]= 13365	13365(6.25)=83531.2
28	[600 – 15(8)][28]= [480][28]= 13440	13440(6.25)=84000
29	[600 – 15(9)][29]= [465][29]= 13485	13485(6.25)=84281.25
30	[600 – 15(10)][30]=[450][30]= 13500	13500(6.25)=84375
31	[600 – 15(11)][31]=[435][31]= 13485	13485(6.25)=84281.25
32	[600 – 15(12)][32]=[420][32]= 13440	13440(6.25)=84000
33	[600 – 15(13)][33]=[405][33]= 13365	13365(6.25)=83531.2

D: Bien. Ahora que ya tenemos la tabla terminada, ¿qué me pueden decir de la columna de las manzanas y de la producción anual?
A_{35}: Van aumentando y luego empiezan a disminuir.
D: ¿En cuál caso empieza a disminuir?
A_{35}: Cuando los árboles son treinta y uno.
D: Entonces, ¿cuántos árboles se deben plantar para que se obtenga la mayor producción de manzanas en el terreno?
A_{20}: Treinta, ni más ni menos.

A continuación el docente, pidió a los estudiantes que trazaran la gráfica en la que el eje de las abscisas (x) correspondiera a los árboles y el eje de las ordenadas (y) representara al número de manzanas producidas por cada cien metros cuadrados. Luego de transcurridos unos diez minutos, el docente se acercó a algunos de los equipos para observar el trabajo realizado, fue entonces cuando se dio cuenta que estaban trazando la gráfica de forma incorrecta; sus errores se caracterizaban por no tomar en cuenta que en el origen debía estar el número cero, tampoco separaban de forma equitativa el espacio e incluso, asignaban los mismos valores numéricos que habían obtenido en la tabla; todos estos errores tuvieron como consecuencia que en la gráfica quedara descrita una línea (ver Fig. 1).
En consecuencia, el docente procedió a explicarles de modo general cómo debían hacer la gráfica de forma correcta.
En la Fig. 2 se muestra la gráfica corregida por uno de los estudiantes que participaron en el presente estudio.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

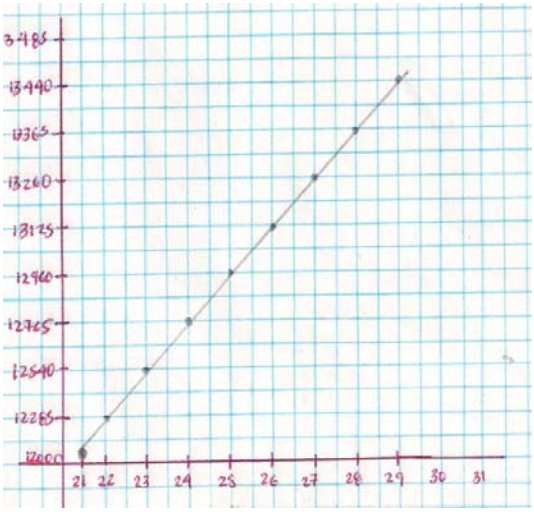


Fig. 1. Ejemplo de gráfica trazada en forma errónea.

Enseguida, el docente pidió a los estudiantes que formularan el planteamiento algebraico a partir de los datos numéricos obtenidos en la tabla 1. Sin embargo, tuvo que guiar otra vez el desarrollo procedimental, tal cual lo venía realizando.

En la Fig. 3, se muestra el planteamiento algebraico que fueron anotando los alumnos conforme el docente iba guiando su ´planteamiento. Cabe señalar que les preguntó cuál debía ser el valor de "x" para que se obtuviera la mayor producción de manzanas en cien metros cuadrados y hubo quien contestó que 30, pero hubo quien aclaró que este valor correspondía al total de árboles y que el valor de la variable "x" correspondía a diez.

A continuación, hizo hincapié en que igualaría la expresión algebraica obtenida a 13500, con la finalidad de que pudiera resolverse la ecuación cuadrática obtenida y darse cuenta de que su valor debía ser diez.

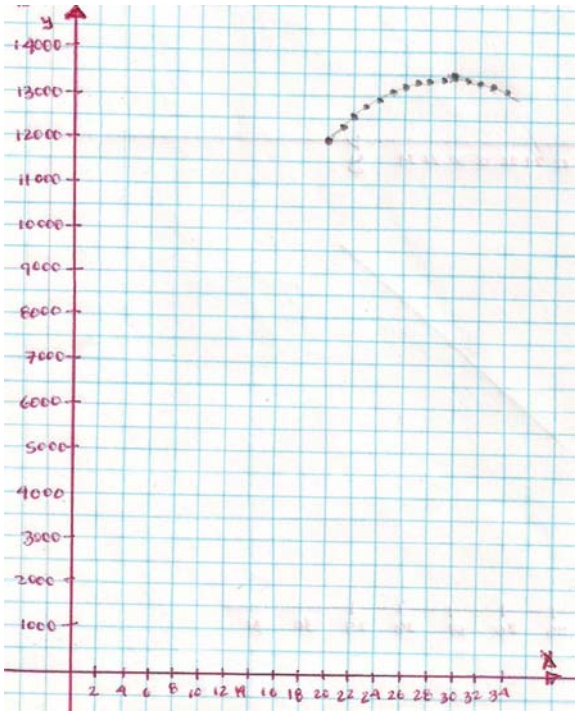


Fig.2 . Ejemplo de gráfica trazada corregida.

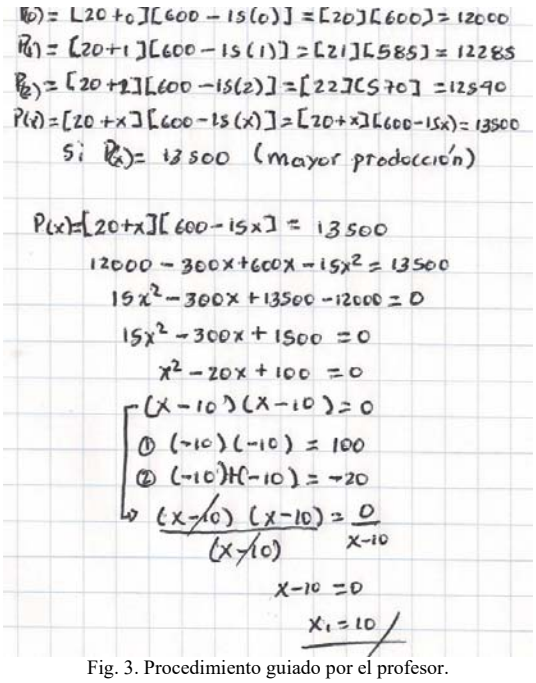


Fig. 3. Procedimiento guiado por el profesor.

IV. A MODO DE CONCLUSIONES

La enseñanza por sí misma no puede asegurar la adquisición de los aprendizajes sobre temas relacionados con la Materia de Cálculo Diferencial. En este sentido, se requiere un dominio suficiente de los conocimientos previos respectivos por parte de los estudiantes, también deberían presentar un desarrollo pertinente de habilidades matemáticas que en suma le ayudaran a solventar los procesos cognitivos que deben ser activados para resolver problemas de optimización sin cálculo y así, desarrollar las competencias señaladas oficialmente.

A pesar de que la enseñanza tuvo que guiar a los estudiantes, esta habilidad docente no fue llevada a cabo en condiciones ideales, pues hubo momentos en los que era imprescindible hacer a un lado su función como mediador.

Con base en lo anterior, [11] señala que la comunicación entre docente y alumnos transcurre muy lentamente en el aula, por lo que se torna muy complicado alcanzar los propósitos generales de un curso como el de Cálculo Diferencial, más aun cuando se tienen que tratar de manera estratégica algunos temas que por anticipado deberían estar bien anclados en los procesos cognitivos de los estudiantes. En referencia a este autor, a la enseñanza le llevo un aproximado de cinco horas clase para formalizar la relación del concepto con el objeto y el signo; lo cual fue incorporado mediante la reflexión general del concepto de optimización a partir de las actividades realizadas que en cierta medida adquirieron sentido para los estudiantes y posteriormente, ellos pudieron formalizar el concepto.

Bajo las condiciones descritas, se promete difícil lograr la autonomía de los estudiantes en el corto plazo, cuyos avances significativos estarán determinados por su responsabilidad y compromiso. Si bien es cierto que la actividad propuesta (hipotética), contribuyó en el desarrollo del pensamiento

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

crítico y reflexivo de los alumnos, se les debe seguir familiarizando con diversas situaciones y contextos.

REFERENCIAS

[1] Martínez, M. Epistemología y Metodología Cualitativa en las Ciencias Sociales. Trillas (2008).

[2] Woods, P. La escuela por dentro. La Etnografía en la investigación educativa. Paidós (1997).

[3] Eggen, P. D.; Kauchak, D. P. Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento. FCE (2005).

[4] Perkins, D. La escuela inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente. Gedisa (1997).

[5] SEGEM: Plan de Estudios de Bachillerato General del Gobierno del Estado de México. SEGEM (2008).

[6] SEP. Acuerdo número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. DOF (2008a).

[7] SEP. Acuerdo número 486 por el que se establecen las competencias disciplinares extendidas del Bachillerato General. DOF (2009).

[8] SEP. Acuerdo número 447 por el que se establecen las competencias docentes para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada. DOF (2008b).

[9] Elizarrarás, S. Nociones para comprender la derivada como razón promedio de cambio en estudiantes de bachillerato. *Memorias del 8º Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas*. UNAM (2015).

[10] Elizarrarás, S. Enseñanza de ecuaciones cuadráticas mediante la resolución de problemas con estudiantes de bachillerato. *Ponencia presentada en el 2º Congreso Internacional de Matemática Educativa en línea*. CICATA-IPN (2016).

[11] Steinbring, H. The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. Springer (2005).

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La enseñanza de las fracciones como parte-todo mediante los modelos de Kieren

Yuliana Bautista Castillo[#]
[#]Escuela Normal Superior de México, Avenida Manuel Salazar No. 201, Colonia Exhacienda El Rosario C.P. 02430 Ciudad de México, México
yulibtsta.matetm@gmail.com

***Resumen*- Los alumnos durante la educación básica tienen dificultades para resolver problemas que implican fracciones como parte-todo por consecuencia fue necesario realizar una investigación mediante una metodología mixta, que tiene como finalidad que los estudiantes comprendan y apliquen el concepto de fracción por lo tanto fue fundamental desarrollar una propuesta didáctica basada en un marco teórico y en los resultados diagnósticos de los estudiantes siendo comparados con la evaluación final para determinar que los educandos dan solución a situaciones problema a partir de la noción de fracción como parte-todo sin embargo es importante reforzar la resolución de ejercicios de citas perceptuales y equivalencia de fracciones mediante las regletas de Cuisinaire. El objetivo de que el alumno aprenda la fracción como parte-todo es que adquiera las bases para comprender y aplicar el concepto de número racional.**

***Palabras clave*- continuos, discretos, Kieren, parte-todo.**

***Abstract*- Students in basic education have difficulty solving problems involving fractions as part-whole consequently was necessary to investigate using a mixed methodology , which aims to help students understand and apply the concept of fractions therefore it was essential to develop a didactic proposal based on a theoretical framework and diagnostic results of students being compared to the final evaluation to determine that learners provide solutions to problem situations from the notion of fraction as part-whole however it is important to strengthen the resolution Dating perceptual exercises and equivalence of fractions by Cuisinaire strips . The aim of the student to learn the fraction as part-whole is to acquire the foundation for understanding and applying the concept of rational number.**

***Keywords*- continuous, discrete , Kieren , part-whole .**

I. Introducción

La docencia exige investigar los procesos cognitivos de los educandos para que aprendan los contenidos temáticos, porque es importante que haya compromiso con el proceso de enseñanza-aprendizaje, porque es fundamental determinar aquellos conocimientos que se necesitan reforzar para lograr un aprendizaje significativo, porque el éxito docente comienza cuando hay una mejora profesional, un desarrollo de competencias, la creatividad, el compromiso con los alumnos y enfrentarse a situaciones que les permitan un crecimiento profesional y personal.

Son por estas razones que se propone una propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones como parte-todo y su ubicación en la recta numérica mediante los Modelos de Kieren, siendo un reto para el docente porque representa una mejora a nivel profesional; debido a que no sólo se llegó a la deducción que los educandos tienen obstáculos con las fracciones sino que se analizó las situaciones que provocan éstos, concluyendo que se debe a los procesos cognitivos de los alumnos consecuencia de las técnicas de enseñanza por lo tanto se consideró importante retomar la falta de comprensión de la noción como parte-todo y su impacto en la resolución de problemas en la asignatura de matemáticas en los alumnos de primer grado ya que influyen en los obstáculos que se presentan en contenidos temáticos de primer grado pero también en conocimientos posteriores.

Para aplicar dicha propuesta fue necesario realizar una metodología de investigación para darle veracidad a las actividades y estrategias didácticas planeadas basándose en una investigación con un enfoque mixto debido a que los instrumentos para recolectar datos, el análisis e interpretación de éstos se integraron del enfoque cuantitativo y cualitativo

Se realizó un análisis de experiencias de enseñanza ya que se diseñó, aplicó y se evaluó una secuencia didáctica que fue acorde con los propósitos de educación secundaria y los de la asignatura de la especialidad.

Mediante el trabajo docente se llevó a cabo una revisión de estrategias de enseñanza basadas en el Modelo de las siete interpretaciones, modelo para la construcción del conocimiento de las fracciones y modelo delas cinco caras para la construcción del conocimiento, que permitieron que los educandos comprendieran la noción de fracción como parte-todo y resolvieran problemas que implicaron su aplicación.

La investigación estuvo sustentada en comprobar si al enseñar la fracción como parte-todo mediante los Modelos de Kieren entonces los alumnos serán capaces de representar las fracciones en modelos continuos, discretos y en la recta numérica. Por lo tanto se propuso lograr que los alumnos comprendieran el subconstructo de fracción como parte-todo para que resolvieran problemas que implicaran modelos continuos, discretos y recta numérica mediante una propuesta didáctica basada en los Modelos de Kieren.

La propuesta didáctica se implementó en la Escuela Secundaria Diurna No.85 "República de Francia", específicamente en los grupos de 1ºB y 1ºE los cuales se integraban de 47 estudiantes, de acuerdo a los test aplicados predominaban los estilos de aprendizaje kinestésico y lectura-escritura, respectivamente.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

A cada grupo se les aplicó un instrumento de conocimientos, habilidades y actitudes donde se interpretaron datos diagnósticos acerca del contenido temático, asimismo al culminar la propuesta didáctica se aplicó una evaluación final que se comparó con las estadísticas anteriores para determinar la eficacia y eficiencia de la propuesta didáctica.

Finalmente es fundamental intercambiar opiniones con otros docentes, retroalimentarse de ellos, de sus experiencias, compartir estrategias de enseñanza con el objetivo de lograr que los educandos tengan un aprendizaje significativo, por lo tanto este artículo de investigación funge ser un espacio de comunicación entre profesores para retroalimentar el trabajo docente y fomentar la importancia de la investigación en el ámbito educativo.

II. PROPUESTA DIDÁCTICA

De acuerdo al acercamiento a la práctica docente se identificaron las dificultades que presentan los alumnos al enseñarse el contenido temático de Resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones, que se mencionan a continuación:

- Suman el numerador con el numerador y el denominador con el denominador.
- Al realizar la multiplicación de fracciones ocupan el siguiente procedimiento: multiplican los denominadores, para después multiplicar el denominador de una fracción por el numerador de la otra.
- En la división se realiza ésta de forma separada, numerador con numerador y denominador con denominador.
- Se les complica ubicar fracciones en la recta numérica.
- Representar fracciones mediante materiales concretos, por ejemplo el Tangram, donde ellos no identificaban el valor de cada pieza.
- Resolver adiciones de fracciones sin utilizar algoritmos sólo aplicando equivalencias.
- Entender las operaciones con fracciones utilizando diagramas.

De lo anterior se infiere que los alumnos:

- Han memorizado los algoritmos pero no tienen una comprensión de éstos por consiguiente los mezclan al resolver ejercicios.
- No han asimilado las características de las diferentes interpretaciones, por lo tanto desconocen en que contextos particulares se aplican.
- No han adquirido la notación del número mixto, debido a que al realizar operaciones con éstos separan los enteros y efectúan la operación correspondiente.
- Utilizan las reglas de los números naturales para resolver ejercicios con las fracciones.

Sin embargo se deduce que el origen del problema se ubica en la adquisición de las diferentes nociones de las fracciones, principalmente en la fracción como parte-todo ya que según [1] sirve de base para la comprensión de los otros constructos intuitivos, además el alumno puede ser que las haya adquirido pero no sabe diferenciarlas e identificar en qué casos se utilizan cada uno.

Asimismo, las dificultades de las fracciones abarcan tanto la comprensión conceptual como procedimental, para [2] se debe a la enseñanza tradicional con la cual se transmite su concepto; es decir la comprensión de las fracciones se logra cuando se enseña utilizando diversas interpretaciones de ésta.

El método tradicional para introducir el concepto de fracciones es sólo como parte-todo, en la educación secundaria se enseñan los algoritmos de división y multiplicación, así como la razón, pero no se especifica que son nociones de la fracción provocando una falta de comprensión y errores matemáticos.

Por consiguiente la importancia de retomar la enseñanza de la noción de fracción como parte- todo con el objetivo de que el alumno comprenda este subconstructo y lo aplique en el aprendizaje de las demás nociones, además de esta manera evitar que el alumno cometa errores matemáticos al resolver problemas que impliquen el uso de las fracciones.

A. METODOLOGÍA

De acuerdo a [3] la investigación es un proceso que utiliza un método científico para obtener información relevante con la finalidad de entender, verificar, corregir y aplicar el conocimiento.

La metodología de investigación nos permite delimitar y dirigir la investigación con la finalidad de recolectar y analizar datos cuantitativos o cualitativos para corroborar hipótesis.

El tema de estudio se delimita a la falta de comprensión de la noción de fracción como parte-todo y su impacto en la resolución de problemas en la asignatura de matemáticas en los alumnos de primer grado.

Debido a la necesidad que presentan los grupo de 1ºB y 1ºE, el presente proyecto propondrá el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la noción de fracción como parte-todo con modelos continuos y discretos, con el objetivo de que los alumnos entiendan esta interpretación y sean capaces de aplicarla a la resolución de problemas.

Asimismo, que les permita comprender a la fracción como: operador, cociente, medida y razón, ya que de acuerdo a [1], la fracción como parte-todo es la base para conocer las demás nociones y en conjunto definir el concepto de fracción.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Mediante el trabajo docente se llevará a cabo una revisión de estrategias de enseñanza que permitan que los educandos comprendan la noción de fracción como parte-todo y que ellos puedan aplicarlos en la resolución de problemas, asimismo realizar adecuaciones para posteriores sesiones.

La hipótesis según [4] indica lo que estamos tratando de probar considerándose como explicaciones tentativas del fenómeno investigado, por lo tanto la comprobación nos permite verificar las suposiciones realizadas mediante el diseño de investigación, aplicación de instrumentos de investigación, recolección y análisis de datos.

La hipótesis que rige la propuesta didáctica es la siguiente: Si se enseña el subconstructo parte-todo mediante los Modelos de Kieren entonces los alumnos serán capaces de representar las fracciones en modelos continuos, discretos y en la recta numérica.

La investigación que se llevó a cabo es mixta ya que según [4] en ésta se recolectan y analizan datos cuantitativos y cualitativos, mediante su integración permiten un mayor entendimiento del objeto de estudio.

El enfoque mixto presenta diversas ventajas como: tener una perspectiva amplia e integral del objeto de estudio [5] y datos más variados ya que son obtenidos de diferentes fuentes, contextos y análisis [6].

La recolección de datos se realizará de manera cuantitativa porque se ocuparán pruebas objetivas con base a los Modelos de Kieren, de igual manera se hará una evaluación de las actitudes conforme a la Escala de Likert y se aplicará la observación guiada, sin embargo durante las jornadas de práctica se utilizará un diario de campo que se considera un instrumento cualitativo.

El análisis de los datos será mixto, es decir en la evaluación diagnóstica y final de conocimientos, habilidades y actitudes se obtendrán estadísticas que permitirán medir el nivel de adquisición y avance en los educandos, sin embargo se determinarán inferencias que expliquen los resultados para que se diseñen estrategias que beneficien al alumno.

También se considera mixta porque la base teórica del diseño de la planeación está basada en otros autores, es decir se realizó una investigación de referentes teóricos como en los estudios cuantitativos; sin embargo se basa en sí misma debido a que las inferencias de los resultados estarán argumentadas en los resultados de las evaluaciones y en lo que se observará en las sesiones, siendo un estudio cualitativo.

La recolección de datos se realizará mediante instrumentos de medición de conocimientos, habilidades y actitudes cuyos resultados obtenidos serán analizadas para corroborar el cumplimiento de los propósitos y la comprobación de hipótesis.

El objetivo de los instrumentos es la medición del grado de desarrollo de conocimientos, se utilizará un instrumento denominado prueba objetiva la cual está diseñada con referencia a objetivos planteados con base a los Modelos de Kieren cuyo propósito es obtener evidencia de los grupos.

Éste es adecuado al proporcionar información sobre el grado de conocimiento de los educandos antes y después de la aplicación de la propuesta didáctica en los grupos de 1ºB y 1ºE.

El objetivo de los instrumentos es la medición del grado de desarrollo de habilidades, se ocuparán las cuatro categorías de habilidades matemáticas según [7] las cuales son para: la formación y utilización de conceptos y propiedades; diseñar y aplicar soluciones a partir de algoritmos conocidos; implementar procedimientos heurísticos; y, analizar y solucionar situaciones problema de carácter intra y extra matemática.

Para calcular la actitud en los educandos se utilizó la escala de Likert que consiste en afirmaciones donde las personas indican su grado de acuerdo-desacuerdo, en una escala de 5 puntos. Los cuestionamientos tendrán como objetivo identificar las actitudes de los educandos en la enseñanza de las fracciones y acerca de las clases de Matemáticas durante la aplicación de la propuesta didáctica.

B. MARCO TEÓRICO

Thomas Kieren contribuyó al análisis de los diferentes significados que se le han asociado a la fracción, las cuales publicó en 1976 se interpreta que los números racionales son considerados como fracciones que se comparan, suman, restan etc. pero también son fracciones decimales, siendo una extensión de los números naturales.

Asimismo los números racionales son clases de equivalencia, que en conjunto con la interpretación de éstos como relación de números de la forma:

$\frac{a}{b} / \ b \neq 0$ permiten la construcción del conjunto de los racionales.

La interpretación de medida está guiada a la ubicación de las fracciones en la recta numérica, mientras que como cociente son aquellos resultados que satisfacen la ecuación de $qx = p$, por último los números racionales son operadores multiplicativos, donde se ejercen las operaciones de multiplicación y división.

Cada interpretación no es independiente una de la otra por consiguiente es importante que el profesor las conozca y evite que las fracciones se reduzcan a procedimientos y algoritmos, por lo que [8] presenta para cada interpretación estructuras matemáticas, cognitivas e instruccionales.

Asimismo [9] propone un modelo de construcción del conocimiento a través de una red de subconstructos de

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

número racional que forman un sistema ideal de conocimiento, estos están asociados a las nociones de fracción: medida, cociente, operador, razón y parte-todo.

Estas cinco nociones tienen como objetivo lograr un constructo del número racional, éstas representan cinco patrones de pensamiento numérico fraccionario o racional [9].

El modelo teórico está planteado con cuatro subconstructos esenciales mientras que el parte-todo está implícito en cada uno de éstos, éste representa los conocimientos ideales para lograr el concepto de número racional como se describe en la figura 1.

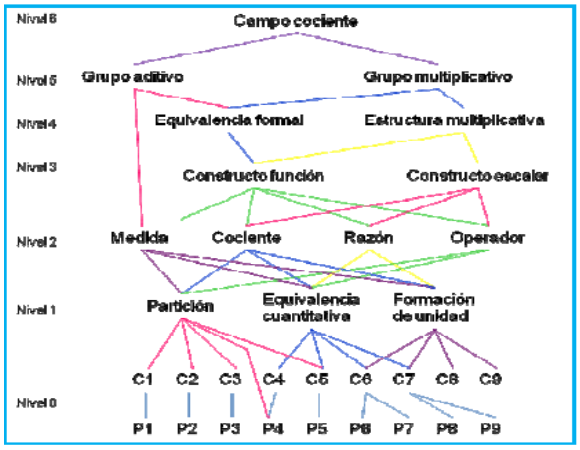


Fig. 1 modelo de Kieren (1980)

Asimismo [10] presenta el modelo de las cinco caras para la construcción del conocimiento matemático las cuales son: matemáticos, imaginación, mecanismos constructivos, psicológicos y uso del lenguaje.

En el caso particular de las fracciones los educandos deben estar inmersos en un ambiente que les permita desarrollarlas de lo contrario el conocimiento matemático no será significativo para ellos, éste se observa en la figura 2.

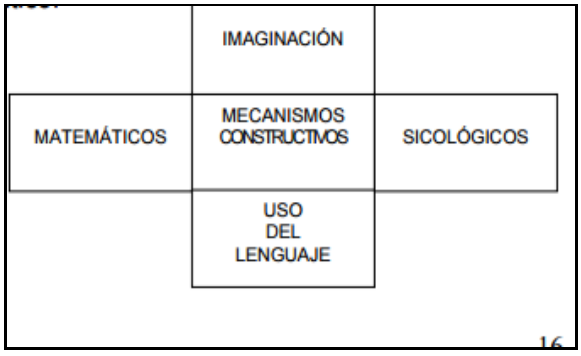


Fig.2. Modelo de las cinco caras para la construcción del conocimiento matemático

1ºB	1ºE
Logros: Comprensión de la definición de fracción; resolver problemas de construcción de la unidad; y, ubicar fracciones en la recta numérica. Dificultades: Resolver problemas que implican citas perceptuales y aplicación del concepto de equivalencias.	
Logros: Utilización de conceptos y propiedades; aplicar soluciones. Dificultades: Implementar procedimientos.	
Logros: categoría 4 y 5 Dificultades: En modelos continuos y discretos se obtiene categoría 2 y 3, mientras en el concepto de equivalencia está en categoría 1 y 2	

C. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados de la propuesta didáctica se identifican en la tabla I.

Tabla I. Resultados

III. CONCLUSIONES

Una conclusión es la generalización de los resultados obtenidos mediante los instrumentos de medición con el objetivo de determinar la viabilidad, eficacia y la eficiencia de la propuesta didáctica para la enseñanza de la fracción como parte-todo mediante los Modelos de Kieren y su ubicación en la recta numérica.

La propuesta didáctica tiene como referentes los Modelos de Kieren, por consiguiente las conclusiones harán referencia a la aplicación de éstos y a las estrategias de enseñanza que se llevaron a cabo. Éstas se presentan a continuación:

Las actividades didácticas diseñadas por el docente teniendo como referencia el Modelo de las siete interpretaciones de Kieren (1976), el Modelo para la construcción del conocimiento de las fracciones (1980) y el Modelo de las cinco caras para la construcción del conocimiento (1980) permitieron que los alumnos definieran el concepto de fracción como parte-todo considerando los modelos continuos

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

y discretos, así como la aplicación de éste. De igual manera los educandos fueran capaces de ubicar fracciones propias e impropias en la recta numérica y resolver ejercicios que implican una construcción de la unidad.

Se determina que es fundamental evaluar la planeación didáctica para diseñar las actividades didácticas que permitan un fortalecimiento de la aplicación del concepto de equivalencia en las regletas de colores y la resolución de ejercicios que implican las citas perceptuales, con el objetivo de que los estudiantes sean capaces de trasladar el concepto de fracción como parte-todo.

Las actividades didácticas basadas en los Modelos de Kieren desarrollaron habilidades matemáticas de acuerdo a Ferrer (2010), como la aplicación del concepto de fracción como parte todo y sus propiedades; de soluciones a partir de algoritmos conocidos y sin embargo es fundamental que el docente refuerce la técnicas cognitivas y prácticas que permitan que el alumno solucione un problema de manera eficaz y significativa.

El uso de materiales concretos, fichas de trabajo, estrategias de participación, el trabajo colaborativo, actividades donde los educandos utilizan su creatividad y enseñanza correctiva motivaron a los estudiantes a participar y trabajar en las clases de Matemáticas como se describe en el apartado 5.3 del Capítulo V, por consiguiente los educandos necesitan que el docente utilice diversas estrategias de enseñanza basadas en sus estilos de aprendizaje y en sus relaciones sociales que permitan un ambiente de aprendizaje propicio donde ellos interactúen con sus pares, con el profesor y con el conocimiento, además es importante que el profesor comprenda a los estudiantes y se comunique con ellos para mejorar las actitudes dentro del aula.

El trabajo docente es complejo ya que se deben diseñar y aplicar estrategias de enseñanza que atiendan a los distintos tipos de ritmos y estilos de aprendizaje, por lo tanto debe entender la heterogeneidad de sus educandos con el objetivo de que se consoliden conocimientos y habilidades.

No es suficiente tener conocimientos de la asignatura para lograr que los alumnos comprendan los contenidos temáticos ni limitar la enseñanza a la explicación de conceptos y procedimientos. Por lo tanto el profesor debe de actualizar sus técnicas de enseñanza y evaluación con base en las características de los discentes y lo que pretende lograr.

Debe tener conocimiento del desarrollo psicológico, social y cognitivo de los alumnos con la finalidad de mejorar la práctica docente. Además es fundamental que diseñe actividades didácticas que permitan que el saber esté al alcance de todos, por consiguiente motive a los educandos.

Es importante que el profesor entienda que la evaluación no sólo incluye a los estudiantes, ésta determina la eficacia de las estrategias de enseñanza y el docente debe tener una disponibilidad a la mejora y asumir la responsabilidad del proceso de aprendizaje.

El docente debe comunicarse con los alumnos con la finalidad de conocerlos, identificar sus intereses y aspectos que permitan entender sus comportamientos para implementar actividades didácticas considerando estas características, asimismo diseñar estrategias dirigidas al desarrollo personal de los educandos basándose en que el profesor influye en la adquisición de conocimientos y habilidades, pero también en las actitudes y motivación de los estudiantes.

La planeación es importante para que el docente dirija el proceso de enseñanza, además permite un control del ambiente de aprendizaje, de los procesos cognitivos.

Además está basada en un proceso deductivo, por lo tanto el profesor realiza una intervención didáctica mediante la dosificación de contenidos de aprendizaje por lo tanto se logra la enseñanza y el aprendizaje de manera periódica, dinámica y guiada donde se erradiquen los obstáculos para lograr una comprensión significativa.

REFERENCIAS

[1] Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, pp. 506-508.

[2] Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Reidel: Dordrecht.

[3] Tamayo, M. (1994). *Diccionario de la investigación científica.* México: Limusa.

[4] Sampieri, R. (2010). *Metodología de Investigación.* México: Mc Graw Hill.

[5] Newman, I. (2002). A typology of research purposes and its relationship to mixed methods. En *Handbook of mixed methods in sodal and behavioral research (*167-188). Thousand Oaks: Sage.

[6] Todd, Z., Nerlich, B. y McKeown, S.. (2004). Introduction. En *Mixing methods in Psychology* (3-16). Hove: Psychology Press.

[7] Ferrer, M. (2010). *La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana.* Tesis doctoral, Cuba.

[8] Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. En *Number and Measurement. Papers from a research Workshop.* Columbus: ERIC/SMEAC.

[9] Kieren, T. (1980). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En *Recent Research on Number Learning* (125-149). Columbus: ERIC/SMEAC.

[10] Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, vol. 2, pp. 162-181.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Un análisis de los significados de enseñanza del Teorema de Bayes

Jorge Carlos Tuyub Moreno*, Jesús Enrique Pinto Sosa**, Martha Imelda Jarero Kumul***
*Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico Superior de Huichapan, Huichapan, Hidalgo, México.
**Facultad de Educación, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México
***Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México
jctuyub@iteshu.edu.mx, psosa@correo.uady.mx, jarerok@correo.uady.mx

***Resumen*- El presente trabajo tiene la intención de dar evidencia sobre los significados que el profesor construye entorno al saber matemático, en particular al Teorema de Bayes. Se asume que dichos significados caracterizan el discurso y propuestas que el profesor aplica en el aula. Para ello se realizó un estudio de casos con profesores de bachillerato del estado de Yucatán. Los resultados hacen notorio la diversidad de significados que cada profesor pretendía generar en el estudiante. El estudio pone de manifiesto sobre la necesidad de espacios donde la reflexión sobre los saberes es esencial para el fortalecimiento del profesor de matemáticas**

***Palabras Clave*- Bachillerato, Profesor de Matemáticas, Teorema de Bayes, Significados**

***Abstract*- The objective of this paper is to present evidence about the meanings that the teachers build around mathematical knowledge, particularly regarding Bayes' theorem. It is assumed that such meanings characterize the discourse and strategies the teachers apply in the classroom. A series of case studies were carried out among high school teachers in the state of Yucatán. The results show the variety of the meanings that each teacher intended to develop in the students. This study reveals the need for more opportunities in which reflection about knowledge will be fundamental to strengthen mathematics teachers**

***Keywords*- Bayes Theorem, Higth School, Mathematics teacher, Meanings**

I. Introducción

Una de las cuestiones sobre la investigación en educción matemática, la matemática educativa y la didáctica de las matemáticas, que ha mostrado mayor afluencia en la última década gira en torno al profesor de matemáticas y aquello que construye en el aula para el aprendizaje. Lo último señala la importancia de la relación profesor y saber matemático, en su interacción y en la búsqueda de significados para proponer mecanismos, representaciones, situaciones, condiciones y experiencias lo más honestas posibles del saber que se desea construir en el aula.

En términos de Brousseau [1][2], esta relación es crucial en el aprendizaje de las matemáticas debido a los obstáculos en la transposición didáctica que sufren los saberes; demandando del profesor una construcción del saber que lo haga inteligible y perceptible sin caer en distorsiones. Dichas construcciones evocan a los significados que el profesor le atribuye al saber matemático, siendo la construcción y trasmisión de significados el objetivo de la enseñanza [3]. Por tanto, mirar la interacción del conocimiento del profesor de matemáticas y el saber matemático, en términos de los significados que construye para luego trasladarlos al aula se convierte en parte importante de la investigación, siendo explicitas en el uso, las explicaciones, los alcances y la propia actuación del individuo [4] [5][6][7].

Por tanto, es preciso señalar al profesor como el elemento clave en el proceso de aprendizaje y de quién es preciso reflexionar y comprender a fin de fortalecer su práctica en las diferentes áreas de la disciplina matemática [8][9][10][11], reconociendo que el conocimiento del profesor influye en el aprendizaje de las matemáticas [12][13].

Bajo esta perspectiva, se realizó un estudio sobre la interacción del conocimiento del profesor de matemáticas y el *saber estocástico*, a fin de conocer los significados atribuidos al saber en su enseñanza en el aula. Fue necesario delimitar los *saberes estocásticos* a uno en particular, el *Teorema de Bayes*, debido a la complejidad de pensamiento que representa, ya que convergen lo inductivo y lo deductivo y además demanda de un proceso de pensamiento inverso a la probabilidad frecuentista; sugiriendo que el profesor que se enfrenta a dicho saber necesita no sólo un buen dominio de los contenidos, sino una comprensión clara de los *estocásticos* y del *Teorema de Bayes*.

En la investigación se contó con la participación de profesores de matemáticas del nivel medio superior del estado de Yucatán. El objetivo de la investigación fue conocer a profundidad la propuesta didáctica que el profesor diseña para su implementación en el aula y la cercanía que este guarda con el Teorema de Bayes, para ello fue necesario identificar los *significados* que el profesor asocia al teorema de Bayes y describir la propuesta que se genera a partir de esos significados. En otras palabras, el interés de la investigación se centra en la *decostrucción* y *construcción* del Teorema de Bayes realizada por el profesor, es decir, ¿qué es el Teorema de Bayes?, ¿Para qué sirve?, ¿Qué pensamiento se requiere?, ¿Cuál son las prácticas asociadas? y por otro lado, ver si los significados que el profesor de

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

matemáticas le asocia al teorema de Bayes norman sus propuestas [14].

Para ello, se necesitó establecer mecanismos de recolección de datos, que se basan en la entrevista a profundidad, la resolución de problemas y el análisis de materiales didácticos para la enseñanza del Teorema de Bayes.

II. Aspecto teórico

A. *Conocimiento del profesor de matemáticas.*

En cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la estocástica durante años las aulas de clases han sugerido un enfoque más determinista, común a las demás áreas de las matemáticas, que se distingue por la aplicación de fórmulas (medidas de tendencia central, medidas de dispersión, cálculo de probabilidad, entre otros) sin discutir su significado, no se percibe la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre, y no se invita al alumno a ser crítico y reflexivo como resultado de una exposición al *pensamiento estocástico* debido a una falta de compresión sobre el saber estocástico [15] [16] [17] [18] [19]. Un cambio en la enseñanza de estocásticos está determinado por un cambio en el conocimiento que tienen los profesores sobre los estocásticos [20]. Para que los profesores fortalezcan los conocimientos que tienen respecto a los saberes que enseñan a fin de contribuir a la mejora de su práctica; suponiendo que un mayor dominio de los saberes de la materia le permite ser capaz de tomar mejores consideraciones didácticas y pedagógicas que favorece una instrucción efectiva.

Sin embargo un mayor dominio no parece sugerir la idea de curso cargados con altos contenidos temáticos de probabilidad y estadística sino de la profundidad de dicho conocimiento, es decir, ¿qué son?, ¿Para qué sirven?, ¿Cuáles son los contextos dónde surge?, ¿Qué involucra dicho saber?, etc., a fin de poder definir aspectos claves como lo es la aleatoriedad, la probabilidad, la variabilidad y distinguir entre la realidad sitúa donde emergen los datos y el modelo matemático estocástico para inferir en dicha realidad

En este sentido se apuesta a la *resignificación* de los saberes para mejor la práctica de los profesores de matemáticas sin descarta el conocimiento del profesor, al contrario se discute y reflexiona sobre la profundidad que tiene de los mismos [21].

La cuestión es ¿cómo logramos la profundidad de dichos conocimientos? O más bien, ¿cómo determinamos la profundidad de dichos conocimientos? plantea que el conocimiento de cualquier individuo, y en un caso concreto del conocimiento de los profesores de matemáticas, es resultado de una continua interacción del sujeto con el objeto matemático, de tal forma que el conocimiento del profesor construye y reconstruye de acuerdo a los escenarios y situaciones en los que desea incidir [21]. Así, la interacción con los estocásticos debería permitir al profesor de matemáticas responder sobre lo que son, porque se construyeron de cierta manera y de qué forma se pueden difundir; cambiando el paradigma en las propuestas de los profesores de matemáticas y proponer conocimientos que sean funcionales, útiles y de fácil apropiación.

B. *El Teorema de Bayes*

El teorema de la probabilidad inversa, fue enunciado por primera vez alrededor de 1764 por Thomas Bayes y redescubierto por Pierre Simon de Laplace en 1774. Ambos tenían la firma intensión de resolver el problema propuesto por Bernoulli y de Moviere, el problema de la inferencia deductiva, que consiste en que dado un evento determinar la *probabilidad de la causa o causas que han generado partiendo de ciertas hipótesis* que se han construido sobre las causas [22].

Tanto Bayes como Laplace fueron capaces de establecer una forma de pensamiento diferente a la que la probabilidad clásica proponía en ese momento, afirmando que la experiencia adquirida a partir de la repetición de un evento se postula como una hipótesis acerca de su comportamiento futuro. Estas experiencias adquiridas mediante la observación se establecen como *probabilidad a priori*, y *la hipótesis*, que en el momento no es observable, luego de ser comprobada se establece como una *probabilidad a posteriori*.

$$P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)} \qquad (1)$$

Basados en la Ec. 1, $a|b$ (a posteriori) es una hipótesis que ha de ser evaluada en términos de los datos empíricos b (a priori), es decir, que la hipótesis está condicionada a los datos, siendo necesario considerar la experiencia previa. Posteriormente los trabajos de Laplace generaron la Ec. 2 que actualmente contienen los libros de texto

$$P(a_i|b) = \frac{P(b|a_i)P(a_i)}{\sum_j P(b|a_j)P(a_j)} \qquad (2)$$

Es decir la propuesta de Laplace era una generalización del teorema de Bayes. Laplace hace un énfasis en el hecho de que la causa (*a priori*) puede estar conformado por diversas causas que son equiprobables, independientes, excluyentes y complementarios.

En esencia, la probabilidad inversa propone un método para evaluar información nueva y revalorar las estimaciones de los hechos con las que contamos (*a priori)* hasta antes de encontrarnos con esta nueva información [23].

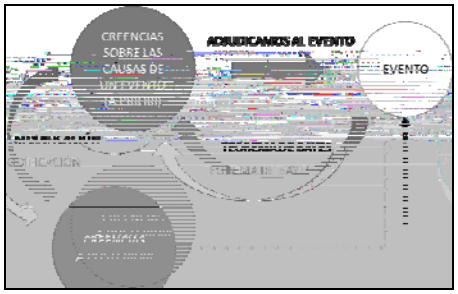


Fig. 1. Teorema de Bayes. Enfoque subjetivista la probabilidad.

En efecto, lo que hay detrás del teorema de Bayes, es un cambio de creencias respecto a la o las causas de un evento, estas creencias están basadas en información empírica.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Cuando evaluamos las causas condicionándolo al evento sucedido se realiza una hipótesis previa, la cual después de ser valorada, evidentemente provocará un cambio de creencias con respecto a las causas que originan dicho evento (ver Fig. 1).

El teorema de Bayes *no trata de aceptar o rechazar la hipótesis previa, sino más bien influir en la creencias de los individuos*, es otras palabras, modificar el grado de creencias de los individuos [24]. El teorema de Bayes, permite observar el grado de racionalidad con la que una persona cambia sus creencias cuando consigue nueva información, *este cambio de creencias debería ayudarlo a tomar una decisión de cómo actuar ante tal evento* [25].

III. Metodología

De acuerdo al propósito de la investigación, que se pueden resumir en comprender la forma en que el profesor construye y decostruye un saber estocástico para incidir en un contexto escolar, se consideró el desarrollo de una investigación de corte cualitativo. En particular, éste enfoque permite comprender la realidad del conocimiento del profesor de una forma dialéctica y sistémica, y más aún que se considera que los significados surgen de aquello que conoce sobre la materia (sus constructos, nociones, naturaleza, etc.) en un contexto de la enseñanza y aprendizaje bajo un paradigma naturalista e interpretativo.

A. *Estudio de casos*

Existes dos cuestiones importantes por las que se consideró el estudio de casos en esta investigación y que tienen que ver con las afirmaciones [26]:

a) El estudio de casos puede ser meramente descriptivo o exploratorio. Es descriptivo si lo que se pretende es identificar y describir las relación que tienen los diferentes factores que influyen en el fenómeno, y exploratorio cuando pretende vincular la teoría con la realidad del objeto de estudio

b) El estudio de casos permiten una replicación literal como teoría, es decir, que permiten la trasferencia de la teoría a otros casos u contextos.

Para la selección de los participantes se consideró la descripción que aparece en la Fig. 2

Fig. 2. Carcaterización de los participantes

Las uniones representas las características que fueron común en los participantes, y aquellos círculos sin unión representan aspectos que difieren de un participante a otro, pero que no fueron considerados dentro del estudio debido a que son sucesos independientes.

B. *Unidades de Análisis*

Para el establecimiento de las unidades de análisis se consideró una propuesta de estudio sobre el modelo teórico del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) [27]. Dicha propuesta surge del análisis y reflexión sobre diferentes investigaciones de carácter sistémico y con rigor científico, que han establecido algunos aspectos que componen y caracterizan el CDC.

En la propuesta se dividen las tres componentes en dimensiones, que son las formas en que se divide cada componente y que constituyen las unidades de análisis de esta investigación; a su vez estas dimensiones se segmentan y codifican en indicadores, estos son las que permiten recolectar los datos y categorizar todo lo observado dentro CDC. De tal forma que los componentes quedan particionadas de la siguiente manera:

a) *El conocimiento del contenido a enseñar*: contiene 6 dimensiones, 18 indicadores y 25 subindicadores

b) El *conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales*: contiene 6 dimensiones, 24 indicadores y 19 subindicadores

c) El *conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante en un tópico específico*: contiene 4 dimensiones, 24 indicadores y 19 subindicadores.

C. *Instrumentos de Recolección de información*

Partiendo del estudio del teorema de Bayes y el sistema de dimensiones e indicadores del CDC, se establecieron tres tipos de instrumentos de recolección de información: 1) una entrevista profunda, 2) entrevista basada en un problema típico y 3) los materiales utilizados en su enseñanza. La Fig. 3 muestra la relación entre estos tipos de instrumentos.

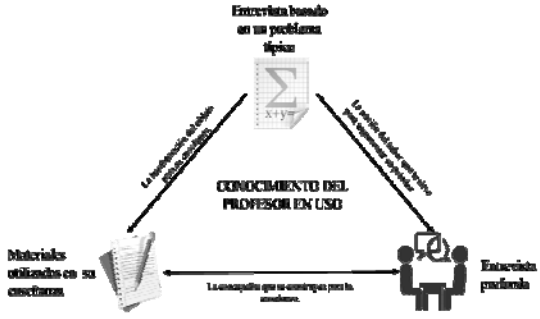


Fig. 3. Triangulación de información

IV. Resultados generales

En cuando a los casos estudiados se presenta la información obtenida de dos casos específicos Ana y Enrique. La Tabla 1 demuestra un que Ana y Enrique asocian significados diferentes al Teorema de Bayes. Lo más significativo es el carácter determinista asociado al

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

tratamiento de Ana basado en el cálculo de probabilidad y reducción del Teorema de Bayes a una probabilidad simple. Por el contrario, Enrique se preocupa porque el escenario donde se construye el Teorema de Bayes sea evidente la presencia de la incertidumbre, dando realce a la fórmula y los elementos en cuanto a su matematización.

La propuesta de Ana (ver Tabla 2) es acorde al enfoque que asume de la probabilidad, pues permite establecer procedimientos y algoritmos que tiende a enfocarse en el cálculo de probabilidades y cumple con el requerimiento escolar.

Tabla I
COMPARACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS ASOCIADOS AL TEOREMA DE BAYES EN LOS CASOS PRESENTADOS

Ana	Enrique
Es una *probabilidad clásica*.	Es una *probabilidad inversa*.
En cuya construcción se aprecian diferentes grupos y en cada grupo se realiza un cálculo de probabilidad condicionada	Se requiere de la teoría de la probabilidad para su resolución
El tratamiento determinístico	Tratamiento no determinístico

Dicho tratamiento se denomina *renormalización*, y especifica que es indispensable para el uso del diagrama de árbol hacer mención de elementos como eventos dependientes, excluyentes, cálculo de probabilidad conjunta, entre otros, como parte comprender porque la asignación de probabilidades en cada una de las ramificaciones y el cálculo de los casos favorables entre los casos posibles [28].

En contraste, la propuesta de Enrique (ver tabla 2) tiende a resaltar la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre, resalta el carácter subjetivo de la probabilidad, la integración de las probabilidades a priori, y la obtención de una probabilidad a posteriori, que tiene como finalidad un cambio de creencias expresadas en la decisión primaria y la decisión final.

Tabla II
COMPARACIÓN DE LAS PROPUESTAS EN LOS CASOS PRESENTADOS

Ana	Enrique
La propuesta es conocida como renormalización, en ella se suprime la formula y se establece al teorema de Bayes como una probabilidad simple.	Se propone un problema de toma de decisión, sobre sale una epistemología similar a la del teorema de Bayes, y la incertidumbre es un factor en la toma de decisiones.

Cabe señalar que en ambos casos se notan deficiencias en las propuestas, sin embargo, se diferencia de un saber más especializado a uno meramente escolar. El saber especializado, no es el aplicado para resolver ejercicios en un aula sino aquél que brinda diversos marcos de referencia o bien pretende resaltar aquellos elementos conceptuales y operacionales del saber que se presenta, haciendo mayor énfasis en lo conceptual y que permita distinguir al saber en los escenarios que se propongan más que la mera resolución de problemas típicos.

V. CONCLUSIONES

Es notable la distinción entre los significados de ambos profesores, debido a que los dos trabajan bajo un modelo por competencias, donde Enrique pareciera ser que tiene una visión más amplia respecto a desarrollar una competencia. La cuestión sería ¿a qué se debe esto? No es a la falta de conocimientos, puesto que ambos tienen la misma formación inicial; No es la experiencia profesional pues Ana tiene más experiencia en el ámbito docente, entonces ¿qué hace esta distinción de los significados de uno y otro profesor?; es mediante la interacción continua con el saber matemático que los profesores construyen su conocimiento alrededor de un saber específico, esto dependerá de aquellos significados que construyan y reconstruyan en cada momento que ellos se acerquen y conozcan esos saberes, no solo en el ámbito escolar, sino en diversos ámbitos donde es funcional; mirar los saberes solo en el contexto escolar, es solo mirar un objeto matemático producto de una trasposición didáctica que ha perdido mucho de aquello que le brinda significado [14] [20].

Por tanto, la profundidad de los saberes se logrará cuando se permita al profesor reflexionar y problematizar lo que conocer del saber, de interactuar con él en diferentes escenarios, de profundizar en la epistemología del saber, lo que en cierta forma podría decirse una *resignificación* continua y permanente de los saberes estocásticos. Esta profundidad brinda autonomía en la práctica lo que permite al profesor diseñar propuestas, rediseñar el discurso matemático escolar y cambiar el paradigma de enseñanza de los estocásticos, pasando de la centración del objeto a la centración del saber, de la trasmisión de conocimiento a la contrición colectiva de los saberes.

Con lo anterior, se busca enfatizar la importancia de estudios que den evidencia del conocimiento del profesor, de la necesidad de proponer espacios y mecanismos para la interacción y sobre entender el conocimiento del profesor basado en los significados que le otorgan a los saberes, y más aún cuando estos determinan el modo el que una persona ve a los saberes, los usos que les da, los contextos en que decide utilizarlo y también la forma en que los trasmite o habla sobre ellos.

REFERENCIAS

[1] G. Brousseau, "Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques" en Reserches en didactique de Matemátiques, vol., no, pp. 33-115, 1986

[2] ---------- "Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (1a parte)", *Petit*, vol. 10, no 21, pp. 21-68, 1989

[3] A. Orton., "Didáctica de las Matemáticas", 2a ed., Madrid, Morata,1996

[4] N., Uc, "Comprensión e interpretación de la variabilidad estadística por parte de estudiantes para profesor de matemáticas", Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Yucatán, México. 2014

[5] W., Serrano, "El significado de objetos en el aula de matemáticas", *Revista de pedagogía*, vol. 27, no. 75, pp. 131-164. 2005

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

[6] J. Godino, S. Llinares, "El interaccionismo simbólico en educación matemática", *Educación matemática*, Vol. 12, no. 1, pp. 70-92. 2000

[7] S. Llinares, "Las creencias sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza en estudiantes para profesores de primaria: Dos estudios de Caso", Tesis de Doctorado, Universidad de Sevilla, España. 1989

[8] M. González, J. Pinto, "La formación de profesores de enseñanza secundaria en España y Méjico", *Matemáticas para el siglo XXI*, vol. 22. 2006

[9] G. Montiel., "Formación docente a distancia en Línea. Un modelo desde la matemática educativa" *Innovación Educativa*, vol. 9, no. 46., pp. 89-95. 2009

[10] R. Cantoral, "Tendencias: los métodos de investigación para profesionalización docente en matemáticas", *RELME*, vol. 16, no. 1, pp.5-12. 2013

[11] L. Sosa, E. Aparicio, M. Jarero, I. Tuyub, "Matemática Educativa: La formación de profesores", *Matemática Educativa: La formación de profesores,* Ed. M. Dolores, et al, pp. 31-45. 2013

[12] S. Llinares, "Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contextos en relación a la noción de función", *Colección Digital Eudoxus*, vol. 15. 2009

[13] ---------- . "Professional noticing: a component of the mathematics teacher´s professional practice", *Sisyphus-Journal of Education,* vol. 1, no. 3, pp. 76-93. 2013

[14] L. Cabrera, "El estudio de la variación en la práctica del profesor de cálculo. Un estudio de casos", Tesis de Doctorado. Cinvestav, México, D.F. 2014

[15] T. Carballo, A. Ojeda, "la enseñanza de la probabilidad en el aula: ideas fundamentales como base de un pensamiento probabilístico en docente de educación primaria", *ALME* XX1, pp. 1107-1116. 2010

[16] M. Cardeñoso, A. Serrano, "¿Puedo adivinar qué idioma está hablando mi amigo con solo contar las vocales? Escenarios para el aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad", *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*, Granada. Sociedad SAEM Thales y Universidad de Granada, pp.279-301. 2006

[17] H. Cuevas, "Enseñanza de la estocástica: sugerencias para su implementación a edades tempranas", *Memorias de XIV Escuela de invierno en Matemática Educativa*, México. 2011

[18] C. Vázquez, A. Alsina. "Enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado", *Números,* no. 85, pp. 5-23. 2014

[19] S. Elizarrarás, "El pensamiento estocástico y el pensamiento pedagógico en la formación de docentes para la educación básica: Viabilidad, Trascendencia y Pertinencia", *Libro de avances de investigación en la mejora de la educación en la formación de docentes,* vol. 2, pp.15-27. 2014

[20] R. Cantoral, G. Montiel, D. Reyes-Gasperini, "El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: El caso de Latinoamérica", *RELME,* vol.18, no. 1, pp.5-17. 2015

[21] B. D'Amore, "Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido", *RELME*, vol. Especial, pp.177-195

[22] T., Bayes, M., Price, "An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chance. By the late Rev. Mr. Bayes, FRS communicated by Mr. Price. In a letter to Jhon Canton, AMFRS", *Philosophical Trasaction*, pp. 370-418. 1763

[23] R., Levin, D. Rubin, "Capítulo 4. Probabilidad I: Ideas introductorias", *Estadística para la Administración y Economía,* Ed. Trujano. Pearson Educación, pp. 127-176. 2004}

[24] J. González, "El razonamiento científico desde una perspectiva bayesiana", *Llull: Revista de la sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las técnicas*, vol. 15, no. 28. Pp. 209-218. 1992

[25] D. Alonso, E. Tubau, "Inferencia bayesianas: Una revisión teoría", *Anuario de Psicología*, vol. 33, no. 1, pp.25-47. 2002

[26] P. Martínez, "El método de estudio de casos estrategia metodológica de la investigación científica", *Revista científica pensamiento y Gestión,* vol. 20. 2006

[27] J. Pinto, "Conocimiento Didáctico del Contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación", Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca, España, 2010.

[28] S. Góme, "¿Para qué enseñar formulas pudiendo enseñar procedimientos? Una propuesta didáctica para el tratamiento de la probabilidad en bachillerato" *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas*, no. 35, pp.55-62. 2000

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

El uso de material didáctico en la enseñanza de las matemáticas

Cruz Rodriguez Monica[#], Cervantes Hernandez Carolina[#]
[#]Escuela Normal Superior de México, Avenida Manuel Salazar #201, Col. Ex Hacienda El Rosario, Del Azcapotzalco, México, DF, México.
monicacruzesp256@gmail.com, caro_mcrth@hotmail.com

***Resumen*- En éste artículo se presenta cómo el uso de material didáctico ayuda a la enseñanza de las Matemáticas; en un inicio se explica brevemente el concepto, y se definen algunos ejemplos de este tipo de herramientas y la creatividad de cada docente para llevarlas a cabo y a qué nos lleva su uso eficiente. Posteriormente se muestran las experiencias de alumnos de la Escuela Normal Superior de México con el uso de algunos materiales didácticos durante las prácticas realizadas en Secundarias a lo largo de su formación como docentes.**

***Palabras Clave*- Aprendizaje, Enseñanza, Material Didáctico, Tecnología en la educación.**

Abstract- This article presents how the use of teaching materials helps the teaching of mathematics; initially the concept is briefly explained, and some examples of such tools and creativity of each teacher are defined to carry them out and what brings us their efficient use. Later the experiences of students of the Escuela Normal Superior de México are shown with the use of some teaching materials for the practices in Middle School throughout their training as teachers.

Keywords- Learning, Teaching, Teaching materials, Technology in education.

I. Introducción

El aprendizaje de los alumnos sobre un contenido en específico no siempre se da con la propia explicación del docente y con la solución a los diversos ejercicios que se lleguen a proponer en la clase. En diversas ocasiones requiere de algunos recursos externos al aula, de manera que éstos faciliten la comprensión de ciertos temas que llegan a no llamar la atención del discente con sólo el uso de lápiz y papel.

II. El uso de material didáctico

Es necesario mencionar, que el mismo lápiz y papel pueden contar como material didáctico; para ello veremos a que se refiere el hablar de material didáctico. De acuerdo a lo escrito por Garrido "El material didáctico representa un apoyo dentro del proceso educativo, puesto que permite que los estudiantes logren el dominio de sus conocimientos de una manera eficaz obteniendo un buen desarrollo cognitivo que facilita su aprendizaje" [1].

De esta manera podemos retomar que todo material sobre el que hace uso el docente para sus clases (incluyendo un lápiz y papel) siempre y cuando ayude al aprendizaje del alumno cuenta como material didáctico. Dentro de la enseñanza de las Matemáticas (centrándose un poco en educación secundaria) el uso de material didáctico resulta muy enriquecedor para los estudiantes; dentro de los distintos ejes temáticos del plan de estudios se pueden incluir diversas herramientas en las planificaciones del profesor, entre lo más conocido se encuentra el geoplano y los algeblocks, pero la variedad de ellos es inmensa de acuerdo a la creatividad que tenga el docente para implementar varios de ellos.

No todos los contenidos que se verán durante el ciclo escolar necesitan auxiliarse de material didáctico, si bien se podrían desarrollar recursos de este tipo para cada tema, no siempre llegan a ser necesarios. En todo momento se debe tener en cuenta las habilidades de los discentes y su desarrollo dentro de la clase ya que los materiales se utilizan principalmente cuando se dificultan ciertos temas, de modo que éstos les ayuden a una mejor comprensión. Cuando el profesor conoce las dificultades de sus alumnos y va observando el desarrollo de cada contenido, es capaz de deducir si necesita auxiliarse del material didáctico o no.

La creatividad que maneje el docente para utilizar alguna herramienta durante sus clases se ve reflejada principalmente cuando dicha herramienta no existe como tal. Al decir que no existe en si como material didáctico es porque en ocasiones no hay materiales designados específicamente a la enseñanza de ciertos temas o porque no se cuenta con los recursos monetarios para poderlos comprar ya sea por parte de la escuela o por los estudiantes por lo cual el maestro debe utilizar la imaginación y su conocimiento sobre éstos para diseñar sus propias herramientas con ayuda de materiales que

Fig. 1. Cajas utilizadas para explicar el contenido de volumen

se encuentran fácilmente dentro del contexto de los alumnos.

En la figura 1 se observan cajas de diversos tamaños y que cada discente puede encontrar dentro de su casa desde cajas de jugo o leche, de medicinas, zapatos etc.; si bien es un

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

material bastante sencillo, con la secuencia didáctica adecuada puede ser de gran utilidad para que el alumno llegue a comprender dicho tema, viendo como el mismo se puede llegar a utilizar en la solución de problemas de la vida cotidiana. En todo momento debe existir la supervisión del maestro para que pueda observar que el material sea usado adecuadamente y determinar si es satisfactorio o si necesita cambiar de estrategia.

Cada docente debe tener la capacidad de incluso crear sus

Fig. 2. Cubos realizados por un docente para el tema de volumen

propios materiales y siempre preparar herramientas para trabajar con ellas, buscando la forma de que sean visiblemente adecuadas para todo el grupo.

En la figura 2 se aprecian unos cubos que realizo un maestro de matemáticas; dichos cubos son más grandes que los que se le proporcionaron a los alumnos, aquí vemos un material didáctico más elaborado, donde el profesor utilizó más su creatividad para llevarlo a cabo, con diversos colores y buscando que sea más atractivo para el alumno, atrayendo su atención a la clase.

Otro tipo de material didáctico que se llega a utilizar en las clases son los programas digitales. Este tipo de herramientas en ocasiones son más atractivas para los alumnos por lo que el profesor debe crear estrategias que le permitan utilizarlas eficientemente, buscando siempre el máximo aprendizaje de ellos.

En un trabajo realizado por Area menciona que "todo material didáctico digital debe estar al servicio del planteamiento pedagógico del curso o programa en el que se usará y debe ser utilizado como un medio o recurso para el logro de objetivos educativos". [2] Se tiene que tener cuidado al momento de trabajar con cada material, checando siempre que el tiempo que se utiliza sea el adecuado y no pasarse toda la sesión con éstos, sino dejando un breve espacio después de que los estudiantes los han manipulado de acuerdo a lo planificado por el maestro y aterrizando las ideas que se obtengan al tema que se está viendo.

Badia, Barberà, Coll y Rochera mencionan que "la clave para ofrecer una enseñanza de calidad desde esta perspectiva, no está en proporcionar ayudas que puedan resultar adecuadas al margen del contexto y de los sujetos que van a hacer uso de ellas, sino en proporcionar ayudas educativas diversas y variadas –en cuanto a cantidad y calidad- susceptibles de ajustarse al proceso de construcción que va siguiendo el alumno". [3]

Antes de presentar algún material didáctico a los alumnos es necesario que el docente pruebe su efectividad, y más si no ha sido utilizado antes (recién creado por el docente), para así evitar contratiempos en clase ya que en ocasiones se puede creer que dicho material es perfecto para la sesión y se desarrollar, pero al intentarlo aplicar no se lleva acabo como se tenía planificado y puede llegar al grado de perderse la clase tal como lo menciona Garrido: "es importante que el docente revise todo el material que va a utilizar en clase previamente ya sea concreto, visual, permanente o elaborado, examinarlo para cerciorar de su perfecto funcionamiento debido a que cualquier contratiempo perjudica de manera substancial el desarrollo de la clase, provocando casi siempre situaciones de indisciplina o desinterés por parte de los estudiantes". [1]

Es importante que el docente utilice de manera moderada cualquier material didáctico ya que el uso prolongado de ellos puede ocasionar que el alumno se acostumbre a trabajar siempre con ellos, y en el momento que se dejen de usar pierda el interés por las clases, ya que no cuenta con la motivación que le han brindado dichas herramientas.

III. EXPERIENCIAS HACIENDO USO DE MATERIAL DIDÁCTICO

Cuando se trabaja haciendo uso de material didáctico en un inicio puede pensarse que facilitara la tarea docente y hará una clase más provechosa y atractiva para los alumnos sin embargo, no siempre ocurre así debido a que al inicio de las practicas docentes dentro de las escuelas secundarias el docente en formación ha tenido poca interacción con la diversidad de materiales que pueden ser útiles dentro de un salón de clases, cabe recalcar que se pueden tener aciertos y equivocaciones de acuerdo con Mancera "los equívocos son fuente de conocimiento que podemos explotar para profundizar en el pensamiento matemático; esto no es nuevo, pues ha sido el motor del devenir matemático" [4]; además es importante siempre tener la planificación a la mano como una guía para el desarrollo de la clase pues esta no puede generarse de forma improvisada.

Los materiales didácticos a los que se recurre de forma inmediata son las herramientas tecnológicas, pero estas representan uno de los mayores retos debido a que para poder hacer uso de ellas se deben dominar en cierto grado por el profesor debido a que pueden surgir dudas con el funcionamiento de alguna herramienta, así como problemáticas respecto al funcionamiento del programa que impidan que el discente continúe trabajando por lo que un primer acercamiento de forma general a las herramientas del programa resulta efectivo para que los alumnos lleven a cabo las instrucciones y encuentren sentido a las actividades y las relacionen con los contenidos vistos durante sesiones anteriores. Cuando se tuvo la oportunidad de trabajar un contenido haciendo uso de herramientas tecnológicas se observó que el tiempo no es suficiente para trabajar como en ocasiones se desea por lo que es un aspecto del cual se debe ser muy cuidadoso.

La implementación de ejercicios resulta un poco más complejo debido a que cuando se llevó a cabo dentro del salón de clases se pretende en un inicio que los estudiantes a partir de la observación del uso de las herramientas usen su creatividad y sigan las instrucciones sin embargo en su mayoría los alumnos reproducen lo que ven proyectado al frente, por lo que se vuelve necesario poner restricciones

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

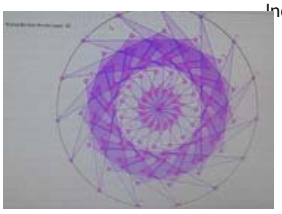


Fig. 3. Ejercicio de rotación realizado en Geogebra

dentro de la actividad para lograr que los alumnos pongan en práctica sus habilidades y los conocimientos adquiridos durante las clases.

En la figura 3 se muestra una actividad en la que se trabaja el tema de rotación posterior a la explicación y realización paso a paso se solicita a los alumnos repitan las instrucciones y solo modifiquen el ángulo de giro de la figura inicial. En esta actividad la mayoría de los alumnos se quedaron con las instrucciones que se dieron en un inicio y no cambian el valor del ángulo de rotación, en cambio como se muestra en la figura 1 el alumno realiza las indicaciones y hace uso de las herramientas del software aplicando lo visto en las clases anteriores para esto es importante integrar junto a las indicaciones cuestionamientos que involucren lo visto con anterioridad o el reforzamiento de conceptos a través de preguntas que requieran la participación de los alumnos.

Dentro de la asignatura de matemáticas el uso del juego de geometría es necesario para trabajar algunos contenidos, el manejo del material para maestro se vuelve importante y necesario cuando se pretende usar.

En una de las escuelas en las que se ha tenido la oportunidad trabajar con los alumnos se cuenta con el material necesario para que los alumnos trabajen sin embargo debido a esto los alumnos confían en que el material les será proporcionado y no lo llevan consigo sin embargo la desventaja que esto representa es que se debe repartir de alumno en alumno el material y recogerse antes de que el tiempo de clase concluya lo cual es tardado cuando se trabaja con grupos muy grandes, sin embargo este es la menor de las problemáticas pues debe tomarse en cuenta si los alumnos lo usan de forma adecuada pues debido a que si no el compás lo recargan con demasiada fuerza sobre el cuaderno y esto genera que la punta se suma o que el compás debido a esa presión se abra y su trazo no quede como debería lo cual provoca desanimo en los alumnos pues piensan que no les sale por que no saben hacerlo cuando en realidad es el uso poco adecuado que hacen del material.

Durante el tiempo que se trabajó con este material se abordaron las líneas notables del triángulo, para trabajar con las actividades primero se explican los pasos y los alumnos lo van realzando. Se observa que los alumnos constantemente solicitan la aprobación por parte del profesor acerca de sus trazos, cuando se les indicaba que no correspondía a la figura indicada lo repiten y vuelven a solicitar la revisión de su trabajo. Para el profesor en formación hacer un uso correcto ante el alumnado resulta importante debido a que los alumnos toman como ejemplo lo que ven en el pizarrón y si un trazo está mal hecho no es posible pedirle al alumno que lo corrija si en el pizarrón esta así es por eso que lo más adecuado es que los trazos se hagan correctamente y de tal forma que los alumnos puedan visualizar como se hace para ellos después poder reproducirlo sin embargo, esto no es una garantía de que el cien por ciento del alumnado lo hará correctamente.

El uso de figuras para realizar ejemplos o de láminas que los contengan y sobre los cuales puedan realizarse anotaciones resulta muy favorable para la explicación de los temas debido a que para los alumnos resulta más visible lo que se explica y lo que se requiere que hagan con el material que se les proporciona o en su cuaderno, además es posible solicitar que pasen al pizarrón a resolver la actividad ya sea para la revisión de la actividad o la aclaración de dudas.

IV. Conclusiones

El uso de material didáctico dentro del aula es importante para el aprendizaje de los estudiantes, ya que los ayuda a comprender mejor algunos de los contenidos matemáticos que en ocasiones van más allá del uso de sólo lápiz y papel.

Usándolo en la manera correcta, adaptándolo a las planificaciones de cada maestro puede llegar a ser una herramienta bastante motivadora para los dicentes, llevándolos a aplicar los contenidos a su vida cotidiana. De igual manera es importante la creatividad que cada profesor aplique a dichos materiales, buscando en todo momento temáticas que sean del interés de sus estudiantes sabiendo de éstas al observarlos y conocerlos, volviéndolos más eficaces para sus clases.

Durante las experiencias que se han tenido haciendo uso con el material didáctico es que cada grupo es diferente por lo que el uso de material didáctico siempre representara un reto para el docente debido a que no se tiene la certeza de su efectividad lo que si en certero es que no siempre se tienen experiencias negativas con cada uno de los materiales, en este aspecto la planificación juega un papel muy importante para poder desarrollar una clase ya sea haciendo uso o no de material didáctico. En cuanto a las herramientas digitales su dominio se vuelve cada vez más importante debido a que es a lo que los alumnos tienen mayor acceso y les es más interesante representando así uno de los mayores retos para los profesores pues debe existir un equilibrio entre estas y el uso de otros materiales así como una relación clara con el contenido que se aborda. Es importante recalcar que la interacción con los alumnos dentro de un salón de clases siempre implicara la adquisición de aprendizajes que pueden permitir mejorar la práctica docente.

REFERENCIAS

[1] Garrido, Y. S.: Material didáctico para lograr aprendizajes significativos en la multiplicación en los estudiantes de cuarto grado de educación general básica, paralelo A de la escuela Fiscal Mixta José Ingenieros Nº 1, de la ciudad de Loja. Período académico 2014-2015. *Repositorio Digital de la Universidad Nacional de Loja.* http://dspace.unl.edu.ec/jspui/handle/123456789/10578 (2016). Accedido el 30 de Julio de 2016.

[2] Area, M.: De los webs educativos al material didáctico web. *Comunicación y pedagogía.* No. 188, pp. 32-28 (2003)

[3] Badia, A.; Barberà, E.; Coll, C.; Rochera, M. J.: La utilización de un material didáctico autosuficiente en un proceso de aprendizaje autodirigido. *Revista de Educación a Distancia.* http://revistas.um.es/red/article/view/24601 (2005). Accedido el 30 de Julio de 2016.

[4] Mancera, E. (2015). El uso de los errores para el desarrollo del pensamiento matemático. México: 3D Editorial

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Nepohualtzintzin: una experiencia docente en matemáticas

Álvaro Martín Vázquez Leyva[#]
[#]Escuela Superior de Comercio y Administración (ESCA), Unidad Sto. Tomás, Instituto Politécnico Nacional, Av. Manuel Carpio 471, Miguel Hidalgo, Plutarco Elías Calles, C.P. 11340, México.
amartin_vazquez@live.com.mx

***Resumen*- El objetivo del trabajo es exponer y sistematizar la importancia de la experiencia docente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través del instrumento denominado *Nepohualtzintzin*. Este instrumento surge de las comunidades educativas en contextos semiurbanos y marginados. Su desarrollo, empero, está restringido al ámbito educativo informal. Tampoco existen estudios que reflexionen sobre las posibles potencialidades de este instrumento para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Mediante entrevistas abiertas y un enfoque descriptivo-cualitativo basado en un marco teórico referencial crítico-analítico, se busca recuperar los testimonios que defiendan la tesis de que el Nepohualtzintzin constituye un potencial de formación de conciencia crítica en los sujetos pedagógicos al involucrar un conocimiento holístico, complejo y contextualizado al entorno de las comunidades educativas locales. Se concluye con posibles preguntas generales que contribuyan a investigaciones y líneas de investigación futuras.**

***Palabras clave*- formación docente, innovación educativa, matemáticas, enseñanza-aprendizaje.**

***Abstract*- The objective is to show and systematize the importance of teaching experience in teaching and learning mathematics through the instrument called *Nepohualtzintzin*. This instrument comes from the educational communities in semi-urban and marginalized contexts. Its development, however, is restricted to the informal education. Nor are there studies to reflect on the possible potential of this tool for teaching and learning of mathematics. Through open interviews and a descriptive-qualitative based on a critical-analytical theoretical framework approach, it seeks to recover the testimonies to defend the thesis that the Nepohualtzintzin is a potential formation of critical awareness in pedagogical subjects to involve a holistic knowledge, complex environment and contextualized to local educational communities. It concludes with possible general questions that contribute to research and future research.**

***Keywords*- teacher training, educational innovation, mathematics, teaching and learning.**

I. Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas adquieren especial relevancia para los sistemas educativos mundiales del presente siglo. En el contexto actual de la globalización económica caracterizada por una alta competencia de los mercados mundiales por expandirse, así como por los cambios en los avances de la información y las tecnologías, han hecho que los organismos internacionales y las comunidades científicas consideren al conocimiento socialmente útil como un capital con valor necesario para el desarrollo económico y productivo de los países modernos occidentales.

Es en este contexto que el aprendizaje y enseñanza de las disciplinas como las matemáticas y las ciencias cobran mayor fuerza que en tiempos pasados, a tal grado que han llegado a considerarse como los conocimientos *top* (si no es que los únicos) que deben impartirse en los sistemas educativos nacionales. La lógica de este discurso justifica la llamada formación de competencias, y demanda la actualización y adaptación permanente del profesorado en la enseñanza de matemáticas en contextos institucionales caracterizados por el uso de las nuevas tecnologías de la información. Si este discurso es universal y hegemónico, a fin a los intereses del capital, entonces las matemáticas también son expresión de ese poder dominante: un solo lenguaje (el formal-abstracto), y un solo método con validez universal (el científico).

En consecuencia, pensar en la formación en las matemáticas desde nuestra circunstancia como nación dependiente, con desigualdades sociales extremas, con un sistema político autoritario y una inabarcable diversidad cultural diferente a la modernidad occidental, significa re-examinar las bases históricas de la llegada y desarrollo de las matemáticas a nuestro país, esto es: desde el centro europeo colonizador (siglo XVI en adelante). Ahondar en ello, no obstante, implica rebasar aquí nuestro objetivo. Aunque es necesario mencionarlo de pasada en apoyo a nuestra tesis y como contexto primordial de referencia en que el Nepohualtzintzin reclama su valor simbólico de sabiduría ancestral.

El orden de exposición es el siguiente: en el segundo y tercer apartados se referencia la problemática en función de los estados del conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en nuestro país. El cuarto aborda las distinciones conceptuales con que se construye el marco crítico referencial. El quinto reseña los antecedentes sobre el Nepohualtzintzin. El sexto aporta los testimonios clave y su relación respectiva con otras dimensiones del aprendizaje del sujeto pedagógico. Finalmente, en el séptimo se aportan preguntas para posibles futuras líneas de investigación.

II. Problemática

Entremos pues directo en el tema: defendemos que el Nepohualtzintzin es un saber *otro,* distinto al monismo

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

matemático occidental heredado por el *yo* conquisto europeo e institucionalizado por el moderno Estado burgués educador. El Nepohualtzintzin se basa en *otra* manera de enseñar, comprender y aprender matemáticas. De ahí su éxito socioeducativo e innovador en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Bajo esta asunción, ¿en qué problemática tiene lugar esta técnica ancestral en el desafío de la recepción y aceptación de las matemáticas en la niñez mexicana?

El estado del conocimiento del Consejo Mexicano de Investigación Educativa, en cuanto a las investigaciones en matemáticas, afirma que [1]:

> Por lo general, la atención está puesta en los procesos cognitivos de los sujetos y en las estrategias que utilizan para resolver los problemas que se les plantean durante las investigaciones. Dentro de este rubro se incluyen, además, las indagaciones basadas en el registro y examen de sesiones de clase, o las sustentadas en la construcción y prueba de situaciones didácticas.

En este sentido, si bien es verdad que en el proceso de enseñanza-aprendizaje intervienen una multiplicidad de factores y niveles de complejidad sobre la disciplina matemática, lo cierto es que el centro de atención se ha trasladado a la organización y profesionalización del docente, proponiendo así modelos alternativos que incluyen desde la mejora de ambientes grupales hasta el uso de las tecnologías y redes sociales. Sin embargo, los problemas de la disciplina matemática persisten en el resumen general siguiente [1], [7]:

- Escaso interés y motivación en la mayoría de los sujetos pedagógicos.
- Exigua pertinencia de las matemáticas con respecto al mundo de la vida cotidiana de los sujetos.
- Predominio de formas de enseñanza tradicional (memorística y mecánica).
- Énfasis en la resolución de problemas de manera individual por sobre la grupal, más aún en procesos de evaluación (exámenes).
- Unidimensionalidad del método formal-abstracto que excluye otras cualidades en que el sujeto pedagógico construye su conocimiento y realidad.
- Aislamiento respecto de otras materias.
- Estructuración en un currículo oficial rígido e inflexible a la innovación.

Por lo arriba señalado, nunca antes aprender matemáticas se ha convertido en sinónimo de aburrimiento y hastío para la generalidad de la niñez mexicana. Numerosas son las voces y estudios de diferente nivel educativo que dan testimonio de esta condición, atribuyendo las cusas a múltiples factores interrelacionados. Lo común de estos resultados es que comparten la idea de que el "problema" está "fuera" de las matemáticas, es decir, a problemas que van desde lo social, organizacional, conductual, curricular y técnico-pedagógico. Lo que no se cuestiona es si acaso las raíces del problema no se deberán al elevado formalismo abstracto intrínseco al paradigma racional matemático, como criticaremos más adelante.

En suma, en ambos diagnósticos se aprecia la ausencia de investigaciones sobre alternativas pedagógicas derivadas de contextos y experiencias locales, así como una reflexión crítica sobre los supuestos epistémicos del paradigma racional matemático dominante. Necesidad que se argumenta a continuación.

III. Razones que justifican la presente propuesta

Tres son las justificaciones generales en que se basa esta propuesta:

Primera: a que en los estados del conocimiento sobre matemáticas y formación docente señalan que aún falta desarrollar propuestas teóricas y metodológicas que proporcionen dimensiones de observación y construcción de los diferentes objetos-sujetos de estudio a fin de profundizar en el conocimiento de la realidad del campo educativo, y que deriven en acciones de intervención en diferentes órdenes: políticas, currículum, perfiles profesionales, programas y prácticas de formación, entre muchas más [1].

Segunda: en el esfuerzo de contraponerse al "asalto neoliberal" de la política educativa oficial diseñada desde los organismos financieros internacionales dirigida a la eliminación progresiva de las Ciencias Sociales en los programas y planes de estudio educativos; en particular, la filosofía, la sociología, y recientemente, la historia, privilegiando los saberes pragmáticos de las Ciencias Exactas como base de la sola formación técnica de cuadros profesionales como capital humano requeridos por el mercado en el contexto competitivo de la sociedad capitalista basada en el conocimiento útil.

Tercera: no obstante que el desarrollo y consolidación de la disciplina matemática mexicana es aún joven, el país tiene alrededor de 1,700 científicos formados en matemáticas, cuando en países desarrollados esta cifra se eleva hasta 70,000 matemáticos. Situación de riesgo, dado el veloz contexto de competitividad mundial expuesto al inicio del trabajo.

Ahora bien, con esta asunción y problemática hasta aquí esbozadas, ¿en qué términos analíticos conviene conceptualizar al Nepohualtzintzin y su idea implícita de enseñar, comprender y hacer matemáticas?

IV. Sustentación teórica referencial

Marcamos una distinción y precisión conceptuales entre *innovación educativa* y *alternativa pedagógica* [3]. La primera atiende a los problemas *técnicos* y *formales* del cambio educativo. La segunda, a los procesos *histórico sociales* y *sustanciales* que subyacen a la trasformación educativa. El problema de los programas y artefactos innovadores (por ejemplo, algunas TIC´s), es que fragmentan una u otra distinción. Aunque en su uso han predominado las técnicas formales y abstractas, desconociendo la base cultural y moral en que adquieren su significado y practicidad concretas, por lo que derivan en modas pasajeras, importadas y huérfanas de cultura, agrandando la enajenación del sujeto pedagógico.

En este sentido, el Nepohualtzintzin es tanto una técnica como una alternativa pedagógica producto del devenir histórico social y cultural ancestral. Al afirmar que el

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Nepohualtzintzin es una alternativa pedagógica es porque que hay registros que confirman su existencia y utilización en las culturas prehispánicas en México, por lo que se convierte en un aprendizaje situado y significativo [6].

Al ser producto de la filosofía de los antiguos mexicanos, la definición del Nepohualtzintzin marca desde el inicio una distinción sustancial respecto del monismo matemático. A saber: La palabra "Nepohualtzintzin", deriva de los vocablos "ne" (persona); "pohual o pohualli" (cuenta), y "tzitzin" (trascender), que en conjunto se puede leer como: "la persona que tiene el conocimiento de la cuenta de la simplicidad de la armonía para trascender" [7].

Por su parte, la distinción conceptual entre *forma* y *sustancia* puede también aplicarse al paradigma matemático. En este caso, de sobra son los planteamientos que han criticado el alto formalismo abstracto y positivista del método lógico-matemático occidental, sus *a priori* sobre el individuo solipsista y calculador, y el destierro de todo contenido sustancial en la naturaleza de éste como condición previa de una clara y precisa objetividad metodológica-cognitivo-operacional.

Bajo estos supuestos epistémicos no sorprende entonces una enseñanza basada en el control racional de la atención subjetiva del sujeto, quien abandonado a su suerte debe adaptar sus sentidos a la rutina y memorización del método de enseñanza, dejando de lado aspectos situacionales e imprescindibles de su cognición y socialización, tales como: la interacción grupal, las emociones, la imaginación, la creatividad, la música, la metáfora, el regocijo, la moralidad, los simbólico, entre muchas más.

Pero llegados aquí, ¿a qué virtudes se atribuyen esta extraordinaria significación del Nepohualtzintzin? Veamos: David Esparza afirma que el Nepohualtzintzin es producto de la sabiduría de las observaciones astronómicas y del comportamiento de la naturaleza realizada durante milenios por nuestras culturas ancestrales:

> El hombre [afirma Esparza] nunca hubiera podido inventar este instrumento maravilloso que es el Nepohualtzintzin, sin conocer la naturaleza; es, pues, resultado de una gran observación de la misma.

Asimismo, efectúa toda clase de operaciones y cálculos matemáticos, desde los básicos (suma, resta, división y operación) hasta los más complejos (ecuaciones, y órbitas sinódicas planetarias); detona procesos en otras competencias del conocimiento, tales como la compresión lectora, entre otras; el ciclo de la gestación de la mujer, y de los sentidos del cuerpo humano [6].

Por estas características que por espacio no podemos enunciar aquí, el Nepohualtzintzin implica una ruptura epistemológica con lo ontológicamente dado en el formalismo abstracto matemático moderno. Sin embargo, también representa el desafío del giro descolonizador en las ciencias humanas, tal como aseveró el sabio Gutierre Tibón al señalar, que [9]:

> Con el raciocinio cartesiano no se logra penetrar en una dimensión del pensamiento tan distinto como el del México antiguo; es preciso despojarse del lastre de la cultura occidental y tratar de pensar como los sacerdotes y el pueblo antes del choque con España.

¿Es posible, entonces, una restauración de la unidad holística de las ciencias que parece proponer Tibón en las condiciones actuales de nuestra cultura y civilización? Sin duda el reto es radical, liberador y deseable. Pero creemos que una herramienta como el Nepohualtzintzin aún está en fase de descubrimiento pese a sus avances educativos, como se demostrará en los apartados sucesivos con los testimonios sobre el mismo.

V. Breves antecedentes

Antes de las confirmaciones, es menester responder cómo surgió el Nepohualtzintzin. Es difícil aquí precisarlo ampliamente y ubicar la génesis de este instrumento. Aunque en general, se puede decir que hay dos fuentes que por el momento se auto-atribuyen el descubrimiento: por un lado, la versión más divulgada que proviene de los padres de familia de una escuela primaria; y por el otro, la versión individual que corresponde a una indagación arqueológica-antropológica de un ingeniero del Instituto Politécnico Nacional [6]. Por razones de espacio, sólo describiremos la primera.

En esta línea encontramos la fuente de la Secretaría de Educación Pública, que señala que el Nepohualtzintzin comenzó a implementarse en la escuela primaria "Efraín Huerta", de la Ciudad de México, por invitación de los padres de familia interesados en el proyecto. Posteriormente, la Secretaría de Educación Pública, a través de la Coordinación General de Educación Intercultural y Bilingüe, diseñó y publicó en 2009, la "Guía Didáctica del Nepohualtzintzin para el Desarrollo de las Competencias Matemáticas", la cual ha sido utilizada por algunos docentes de la Ciudad de México y estados de la República Mexicana, principalmente a nivel primaria [2].

La iniciativa correspondió a cargo de la maestra Claudia Soto, quien solicitó a la directora que se incorporara el instrumento a las actividades en la escuela primaria, ya que había visto que al trabajar el Nepohualtzintzin con sus hijos obtuvo beneficios considerables en el aprendizaje de las matemáticas. A raíz de este acercamiento y de la apertura al diálogo por parte de la directora, es como la maestra incorporó el proyecto en forma de talleres en los Consejos Técnicos de Participación Social. Los talleres se realizaron fuera del horario escolar e involucró tiempo y esfuerzo adicional de los padres de familia y maestros de la escuela [2].

El proyecto "Nepohualtzintzin: una alternativa para el aprendizaje de las matemáticas", ganó el primer lugar en la categoría de actividades recreativas artísticas y culturales en el concurso "Estrategia de Participación Social para una Escuela Mejor", organizado por el Consejo Nacional de Participación Social en la Educación en 2011.

Convenga entonces los testimonios clave siguientes como botón de muestra sobre los beneficios y alcances del Nepohualtzintzin en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

VI. Aportaciones. Testimonios clave

A continuación agrupamos los testimonios de los docentes en el uso del Nepohualtzintzin [2], en las dimensiones de análisis siguientes:

a) Vinculación con otras competencias:

Testimonio 1: […] el Nepohualtzintzin permitió observar un avance en los procesos de comprensión y lectura de los problemas matemáticos en los niños y niñas relacionados con el uso del Nepohualtzintzin, tales como escribir una cantidad grande, cómo hacer sumas, restas multiplicaciones y todo tipo de operaciones matemáticas que les va dando cierto orden elemental y sistemático.

Testimonio 2: […] sorprende a los docentes que los niños pudieran escribir cantidades tan grandes que van más allá de centenas, millares, millares de millón, etcétera, y cómo posteriormente las podían plasmar por escrito en el pizarrón para resolver determinados problemas. Además, también grandes avances en la lecto-escritura, el raciocinio de las letras y la velocidad lectora.

b) Cambios en la percepción e identidad de las prácticas docentes:

Testimonio 3: […] las maestras de matemáticas quedaron tan impactadas de las bondades de Nepohualtzintzin que propusieron regalar tres puntos a cada alumno que asistiera al taller, la condición era que fueran acompañados por su papá o mamá.

c) Contenido lúdico de las matemáticas:

Testimonio 4: He constatado que los niños manejan el Nepohualtzintzin de una manera tan dinámica, divertida y no tan tensa a la hora de elaborar o resolver operaciones básicas de problemas, incluso ejercicios del mismo libro de la SEP.

d) Vínculos con la comunidad escolar:

Testimonio 5: Los talleres fueron un éxito a tal grado de que los salones estaban a reventar y no se daban abasto los maestros para la enseñanza en cada salón, por lo que se tenía que suceder unos a otros.

e) Refuerzo del aprendizaje cultural:

Testimonio 6: cuando se aplicaron exámenes y la secuencia didáctica del Nepohualtzintzin se complementó con algunas canciones prehispánicas y entonces junto con los niños cantábamos los colores del arcoíris.

f) Cambios en la práctica docente:

Testimonio 7: Con la práctica diaria con el manejo diario pueden desarrollar su pensamiento matemático pueden desarrollar su atención y creatividad.

Así, mientras que para algunos el Nepohualtzintzin es una opción para el mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas en la niñez mexicana, para nosotros constituye el instrumento que permite por excelencia esta misión educativa. No sólo los alumnos aumentarían sus habilidades para el cálculo matemático, sino que además desarrollarían todas sus competencias como seres humanos.

VII. Conclusiones

Muy lejos está el Nepohualtzintzin de ser una utopía romántica y nostálgica de la gloria cultural de un pasado paradisíaco perdido en algún lugar del tiempo. Verdad es que toda política, programa y plan educativo que no esté en sintonía con las condiciones y saberes regionales y locales, pasados y presentes, de cualquier país, está condenada al fracaso. De esta ley no escapan las matemáticas modernas.

Como se observa en los testimonios, la cualidad lúdica del Nepohualtzintzin promueve que las matemáticas sean además de divertidas, amables. Promueve un capital social o de confianza en los alumnos para acercarse al conocimiento de las matemáticas, ya que como se sabe la primera experiencia en la niñez marca el futuro de su relación con esta ciencia, y la gran mayoría se caracteriza por fracasos que hacen de las matemáticas una primicia experiencial de terror.

Por consiguiente, el Nepohualtzintzin es anti-alienante en el modo de iniciación pedagógica a las matemáticas. Y es así porque si como aseveramos en el trabajo este instrumento es producto del devenir histórico social y, además, cosmogónico-ancestral, luego entonces está hecho para engrandecer y trascender al sujeto- La matemática antigua mexicana jamás sirvió para enajenar al sujeto, que por este conducto se introducía al conocimiento interno y externo del universo.

El Nepohualtzintzin proporciona a la comunidad educativa (maestros, padres de familia, autoridades y alumnos) una forma diferente de razonamiento lógico que abre la posibilidad organizar, planificar, evaluar, construir y argumentar de una manera más cercana al saber popular y circunstancial del lugar en que adquiere sentido y significado particular.

Como visión del mundo, el Nepohualtzintzin es un horizonte de espejos, de formas inabarcables a la imaginación. No finaliza con aprender tal operación o ecuación matemática, sino que deja abierta una fisura a la infancia mexicana para asomarse al mundo de sus sueños, a la inagotable energía imaginativa y creativa para llegar a *ser* en su vida futura.

Se objetará con todo derecho la ausencia de datos sobre su impacto en los resultados educativos en matemáticas (prueba PISA, por ejemplo). No obstante, el objetivo en este trabajo fue una primera sistematización de acercamiento cualitativo y, posteriormente, su diseño con pruebas estadísticas de evaluación en un estudio subsecuente.

VIII. Discusión

Por esta razón, queremos finalizar con las siguientes preguntas como aportación de posibles líneas o hipótesis de investigación futuras:

¿De qué manera el Nepohualtzintzin está transformando o no la práctica docente en la enseñanza de matemáticas?

¿En qué sentido el uso paulatino y cotidiano de esta herramienta está promoviendo cambios en la identidad e imaginario en los actores de lo que significa ser docente?

¿Qué desafíos enfrenta el Nepohualtzintzin para ser incorporado en la currícula oficial de la enseñanza en matemáticas?

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

¿Hasta qué punto la apropiación social y comunitaria del Nepohualtzintzin ha significado el desarrollo de capital social e intelectual en los actores educativos relacionados con su aprendizaje?

¿Qué implicaciones a nivel de la organización y de la gestión de la escuela traería consigo la instrumentación del Nepohualtzintzin?

¿Hasta dónde esta innovación puede ser sostenida en el tiempo y qué recursos didácticos y de formación sería necesarios?

¿Qué obstáculos y beneficios, retos y oportunidades traería consigo la implementación de Nepohualtzintzin en relación con la evaluación estándar de los aprendizajes matemáticos, así como de la evaluación de la práctica docente promovida por la reforma educativa vigente?

¿Cuáles diferencias son posibles observar y sistematizar en el Nepohualtzintzin desde la perspectiva de género?

Referencias

[1] Ávila, A.: Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos (Tomo I). Grupo Ideograma Editores. México. pp. 339-356 (2003).

[2] Carrillo Suárez, C. El Nepohualtzintzin, la cuenta de los antiguos mexicanos. https://www.youtube.com/watch?v=n21Qx8PiCLM, Accedido el 6 de Octubre de 2014.

[3] Díaz Barriga, Á.: Modernización de la eduación en México e innovación educativa. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV, IPN (1994).

[4] Díaz Barriga Arceo, F., & Hernández Rojas, G.: Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista. México, D.F.: Mc Graw Hill. (2012).

[5] Everardo Lara González, J. F.: Nepohualtzitzin: un modelo matemático náhuatl. *Revista digital universitaria* (2014).

[6] Hidalgo Esparza, D.: Nepohualtzintzin computador prehispánico en vigencia. México, D.F., Diana (1977).

[7] Lara González, E., & Flores Sandoval, A.: Manual didáctico del Nepohualtzitzin para el desarrollo de las competencias matemáticas. México D.F., Secretaría de Educación Pública (2009).

[8] Lara González, E., & Lara Torres , J. F.: Nepohualtzintzin un modelo matemático náhuatl. *Revista Digital Universitaria*, núm. 12 (2014).

[9] Tibón, G.: Historia del nombre y de la fundación de México. FCE. México (1993).

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Aspectos del tránsito del pensamiento algebraico elemental al pensamiento matemático superior en la educación básica

Alejandra Avalos Rogel[#], Gilberto Castillo Peña[#], Lucio Agustín Rodríguez de Jesús[#]
[#]Escuela Normal Superior de México Especialidad en Matemáticas, Manuel Salazar No. 201, Exhacienda el Rosario 11320, México
alejandraavalosrogel@hotmail.com, gil29095@gmail.com, rebelbar99@hotmail.com

***Resumen*- Se presenta una investigación sobre el tránsito del pensamiento algebraico elemental al pensamiento matemático superior de adolescentes entre 13 y 15 años de edad que cursan la secundaria de la educación básica, como resultado de interacciones en ambientes tecnológicos con Geogebra. Se recurrió a una metodología cualitativa en la que se analizó producciones en una secuencia didáctica sin intenciones fenomenotécnicas del tema de "Proporcionalidad y funciones". Los resultados apuntan a una alfabetización matemática definida por Skovsmose [1], desde la lectura y escritura de representaciones gráficas, geométricas y analíticas de funciones en contextos, y el tránsito entre ellas con mediación tecnológica; a una construcción incipiente de la noción de densidad en la continuidad, y en el crecimiento y decrecimiento de funciones no lineales; y en el manejo de desigualdades para definir propiedades de funciones como respuesta a una necesidad de comunicación. Se concluye que los ambientes de geometría dinámica permiten la flexibilidad cognitiva para dicho tránsito.**

***Palabras Clave*- Educación básica; educación matemática; pensamiento algebraico; pensamiento matemático superior.**

***Abstract*- A qualitative research on the transition from elementary algebraic thinking to advanced mathematical thinking as a result of interactions with Geogebra technological environments in middle school 13 to 15-year-old students is presented. Their learning productions were analyzed based on a "Functions and Proportionality" teaching cycle designed without phenomenotechnic intentions. The results reveal a mathematical literacy, notion by Skovmose [1], ranging from the reading and writing of graphic, geometric and analytical function representations in contexts and their transit with technological mediation to an incipient construction of the notion of density in continuity, the increase and decrease of non-linear functions, and management of inequalities to define properties of functions. All this as a response to a communication need. We conclude dynamic geometry environments allow cognitive flexibility for this transit.**

***Keywords*- Advanced mathematical thinking; algebraic thinking; elementary education, mathematics education.**

I. Introducción

El análisis de los procesos que tienen lugar en la formación inicial de profesores de matemáticas también permite mirar a los estudiantes de la escuela secundaria básica en la construcción de su propio pensamiento matemático. El interés por el tema del tránsito del pensamiento algebraico elemental al pensamiento matemático superior en la secundaria, surgió en las discusiones de algunos formadores de la Escuela Normal Superior de México en relación al impacto de las decisiones profesionales de los normalistas en el pensamiento matemático de los adolescentes.

En efecto, los formadores se percataron que algunos estudiantes normalistas del último año de la Licenciatura en Educación Secundaria en la especialidad en matemáticas, durante las jornadas de prácticas profesionales en condiciones reales, incorporaban en los planes de clase temas no señalados en los programas de la educación secundaria, o temas con un grado de profundidad mayor. Cuando se les cuestionaba sobre tales decisiones curriculares, ellos afirmaban que, en base a su propia experiencia como estudiantes del bachillerato y de educación superior, los contenidos de la secundaria no brindaban los antecedentes necesarios para abordar los contenidos del siguiente nivel. Otro argumento era que los temas tal y como estaban presentados en el curriculum, requerían de contenidos antecedentes o consecuentes sin los cuales no era posible aplicar procesos matemáticos reversibles en diferentes problemas, por ejemplo el abordaje de los productos notables –que no aparece en los programas-, y que según ellos va a la par del estudio de la factorización, o bien temas sin los cuales es difícil pasar de una representación matemática a otra.

La verificación de esta hipótesis curricular en las producciones de los estudiantes de secundaria nos llevó a observar que había cambios cualitativos en su aproximación a los problemas matemáticos, que si bien se manifestaban como "errores" matemáticos, éstos eran diferentes a los que comúnmente son asociados con el tránsito al pensamiento algebraico, lo que nos permitió como investigadores aventurar la conjetura didáctica de que había una transición al pensamiento matemático superior.

Esto nos llevó a la propuesta de una investigación cuyo propósito es caracterizar el tránsito del pensamiento algebraico elemental al pensamiento matemático superior en la educación básica, a partir de las restricciones que impone la cultura matemática de la escuela secundaria.

En este documento se expone brevemente el planteamiento del problema, los referentes conceptuales y la metodología, los resultados y unas breves conclusiones.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

II. Planteamiento del problema

Diversas investigaciones entre las que se encuentran las de Folloy y Rojano [2], de Butto y Rojano [3] y más recientemente Godino et al. [4] han estudiado el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico como un proceso inherente de la escolaridad básica. Dado que el proceso no es inmediato, no se había considerado la posibilidad de que hubiera elementos que dieran cuenta del tránsito al pensamiento matemático avanzado.

En efecto, numerosos estudios como los de Artigue [5] y Azcárate [6] han estudiado las dificultades de los estudiantes de matemáticas cuando ingresan al medio universitario, que son inherentes a la construcción de un pensamiento matemático superior. Sin embargo, diversas evidencias empíricas permiten identificar que en el tramo de la secundaria básica los adolescentes tienen la oportunidad de experimentar un tránsito del pensamiento algebraico elemental al pensamiento matemático superior, proceso que probablemente tiene lugar en el bachillerato, en virtud de su carácter propedéutico para la educación superior. ¿Qué características tiene dicho tránsito? ¿Cómo se evidencia en los errores de los estudiantes? ¿Qué lo promueve?

III. Referentes conceptuales y metodología

Como se señaló anteriormente, las investigaciones que han abordado las características del pensamiento superior como las de Artigue [5] y Azcárate [6] se han concentrado en investigar las principales dificultades de los estudiantes de universidad al iniciarse en el estudio de las matemáticas superiores, algunas de ellas derivadas de los problemas de la enseñanza intuitiva del cálculo en el bachillerato, y otras más derivadas del tipo de objetos con los que se inicia el estudio del Análisis matemático, por ejemplo la secuencia límite–continuidad–derivada, o el planteamiento de la integral como una antiderivada. Los autores coinciden que esa enseñanza ha impedido ver cuáles son aspectos que conforman el tránsito del pensamiento algebraico al pensamiento superior.

Sin embargo, también coinciden que el pensamiento superior tiene ciertas características, como la búsqueda de la sistematización, el rigor y la generalización. Al respecto Castella [7] afirmaría que la transición está ligada a un cambio en las culturas matemáticas de las instituciones donde se estudian matemáticas, puesto que la demanda de rigor, e incluso de la prueba y demostración, está liga a las prácticas de la educación superior.

Pero el acceso a las culturas matemáticas de la educación superior supone una alfabetización matemática, en el sentido de Skovmose [1]: un domino de los aspectos matemáticos, de su uso en tanto herramienta que se aplica y que es susceptible de ser diseñada a partir de un razonamiento matemático y validarse mediante una argumentación, y que se valora de manera crítica la pertinencia de su uso en un determinado contexto.

Estos aspectos sirvieron en esta investigación como referente para contrastar y analizar los procesos que seguían los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático escolar relacionado con las funciones, particularmente lo que la cultura matemática escolar favorecía en términos de la construcción de un pensamiento matemático superior.

Se recurrió a una metodología cualitativa en la que se analizaron producciones de estudiantes de 13 a 15 años de edad, pertenecientes a tres grupos de tercer grado de una secundaria de alta demanda por su buen nivel académico. Las producciones se realizaron en un ambiente de intercambio en el aula y con la mediación tecnológica gracias a la implementación de una secuencia didáctica sin intenciones fenomenotécnicas, esto es, la secuencia no se diseñó con fines experimentales o de ingeniería didáctica. Sin embargo, sí fue motivo de discusión el diseño y los resultados al interior de un grupo de investigadores y maestros en servicio, cuya mirada estaba centrada en el impacto de los ambientes tecnológicos en la construcción del pensamiento matemático.

La secuencia didáctica estuvo conformada de 10 planes de clases diseñadas con la metodología de planificación argumentada con las que se abordaría el subtema "Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones", del tema de "Proporcionalidad y funciones" del currículo oficial de la asignatura de Matemáticas del nivel.

Se hicieron algunas transcripciones de las interacciones áulicas, y se recuperaron las producciones de los estudiantes. En algunos casos, se entrevistaron algunos estudiantes con la finalidad de dar inteligibilidad a los procedimientos.

IV. Resultados

Los resultados se refieren a los procesos de lectura y escritura de las representaciones matemáticas derivados de la necesidad de representación y tránsito de representaciones, a la construcción de propiedades de los conjuntos numéricos a ser abordados, y a la necesidad de formalización a través de la definición de los rangos de variabilidad de las funciones.

A. Los procesos de lectura y escritura de las representaciones matemáticas

Se considera que el pensamiento matemático superior está ligado a nuevos procesos de alfabetización matemática, a partir de una lectura y escritura de representaciones gráficas, geométricas y analíticas de funciones, en un contexto determinado. Se había elaborado la conjetura de que los problemas verbales brindarían el contexto que detonaría la necesidad de construcción de otros conjuntos numéricos. Sin embargo la apuesta investigativa también tenía en la mira la posibilidad que brindan los ambientes tecnológicos.

Las producciones de los alumnos llevaron a la consideración de que el tránsito entre representaciones es posible gracias a la mediación de la tecnología,

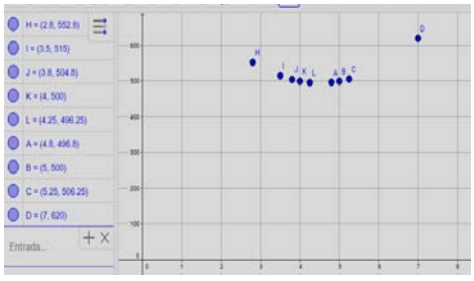


Fig. 1. Uso de deslizadores en el estudio de propiedades de funciones cuadráticas

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

particularmente en ambientes que brindan flexibilidad en el tratamiento gráfico, y la posibilidad de identificar el impacto de la variación de una representación geométrica en una representación gráfica, como fue el caso de algunos problemas analizados con Geogebra.

Para algunos alumnos, el pensamiento matemático superior surgió como una necesidad de comunicar y representar el problema propuesto en la secuencia didáctica en términos de su operatividad. Para los alumnos el problema a franquear era cómo representar lo que veían en términos no de la operación sino de la operatividad, tanto gráfica e incluso aritmética.

B. La densidad de los conjuntos numéricos

Un obstáculo epistemológico al que se enfrentaron los alumnos estaba ligado con el tipo de conjuntos numéricos

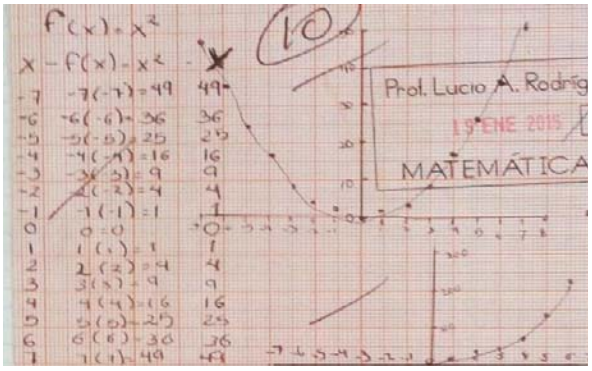


Fig. 2. Representaciones de funciones cuadráticas

con los que se trabaja en educación básica. El conjunto de los naturales, pero sobre todo los números enteros, se constituyen en un punto de partida que dificulta el abordaje de los problemas planteados debido a que las funciones estudiadas en la clase tienen como dominio los números reales.

Cuando se pide la gráfica de una función como por ejemplo la que se muestra en la imagen, $f(x) = x^2$, los estudiantes elaboran una tabulación, en la que recurren a números naturales, y en el mejor de los casos números enteros, y sustituyen.

Como se observa en la producción, el alumno no sólo grafica los puntos obtenidos, dibuja un trazo de la gráfica continuo, y en dicha acción atiende más al trazo que a las propiedades mismas de la función por ejemplo, que el mínimo es estrictamente el punto (0,0), o a la simetría de la gráfica.

En otras palabras, pareciera que existe en los alumnos una necesidad "topológica" de completar los huecos, necesidad que de alguna manera tienen que satisfacer mediante el trazo continuo sin atender al conjunto numérico del dominio, de tal suerte que pueda ser satisfecha la definición de densidad de Doneddu [8] "Ningún intervalo abierto incluido en Q es vacío". Aun si llegan a utilizar números racionales, la mirada no se centra en lo que sucede entre los puntos, por ejemplo, la posibilidad de que hubiera un hueco, sino en la creencia en el continuo.

Sin embargo, el continuo está acotado: como se ve en la figura, el estudiante pone tope al rango –el último valor de f(x) que ha sido calculado.

Aquí cabe recordar que la densidad numérica es una propiedad (objeto) que se encuentra definida por la posibilidad de encontrar un elemento de un conjunto ordenado entre dos elementos del mismo (procedimiento). La dualidad objeto – procedimiento nos lleva a clasificar el concepto como parte del "pensamiento matemático superior".

El planteamiento de problemas analizados con el uso de Geogebra llevó a los estudiantes a una construcción incipiente de la noción de densidad a partir del análisis de la

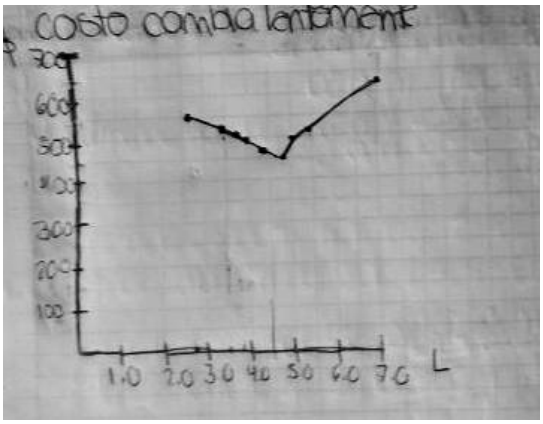


Fig. 3. Representación gráfica del costo de un trabajo en un terreno cuadrado elaborado por una estudiante.

continuidad de las funciones, del análisis del crecimiento y decrecimiento de una función cuadrática y particularmente cuando se trataba de obtener el máximo o el mínimo como parte de la solución requerida. En la Figura 1 se muestra el uso de deslizadores en el software para el estudio de las propiedades antes mencionadas.

En uno de los problemas que fue planteado a los estudiantes, se pedía que reflexionaran sobre una gráfica que representa el costo para hacer un trabajo en relación a un terreno cuadrado y el lado del mismo.

En la Figura anterior la alumna da cuenta del tránsito en virtud de lo que significa para ella la densidad y su relación con la variabilidad. La concavidad es "casi lineal", y si bien identifica un punto mínimo, la posibilidad de la simetría aún no existe. También se percata de que hay intervalos donde el "costo cambia lentamente". La lentitud está asociada a la manera como crece o decrece la función, pero también a los efectos la dinamicidad del programa Geogebra, que es la herramienta con la que habían trabajado, y que es trasladado al trabajo con lápiz y papel.

Por otro lado, se observa que la alumna grafica numerosos puntos, pero considera la posibilidad de la existencia de números "intermedios" en un conjunto denso, lo que la lleva a realizar un trazo continuo.

Es evidente que nociones formales del concepto de densidad se encuentran lejos de aparecer en el pensamiento del estudiante, pero ha podido expresar un concepto matemático objetivamente, cuando hace el trazo, y procedimentalmente, al obtener el conjunto de puntos que son resultado de la asociación que determina la función que da solución al problema.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

C. La necesidad de establecer rangos como un antecedente para la definición matemática

El análisis de la variabilidad llevó a la necesidad del manejo de desigualdades para la determinación de rangos. El trabajo de la desigualdad en el tránsito al pensamiento superior es importante porque requiere trascender las relaciones de equivalencia, aspecto que es recientemente construido en el tránsito de la aritmética al álgebra.

Cabe destacar que el establecimiento de rangos también es importante para definir propiedades de funciones como respuesta a una necesidad de comunicación, y sobre todo para la formalización de algunas propiedades de cierto tipo de funciones: establecer el rango del crecimiento y decrecimiento, la concavidad, la continuidad y discontinuidad, entre otros.

Los rangos dan la posibilidad de plantear a los alumnos que habían apostado por la continuidad topológica, un conflicto cognitivo: ¿qué sucede alrededor de la cota?

Intentar responder a esta pregunta lleva a los estudiantes a la construcción de la noción de densidad.

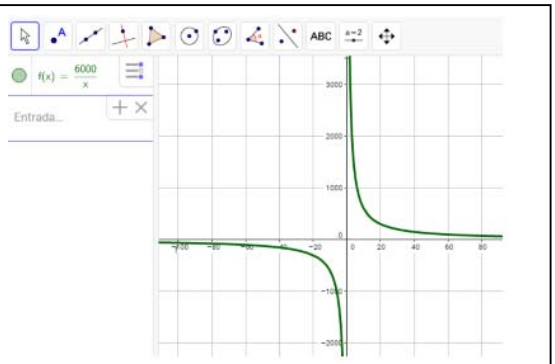


Fig. 4. Representación gráfica para establecer intervalos

Para los estudiantes recurrir a los intervalos para caracterizar las propiedades de las funciones respondía a una necesidad comunicativa: en algunas ocasiones recurrían a segmentar el problema, e incluso la representación, para dar cuenta de la estabilidad de la función en un intervalo, sin recurrir necesariamente a él.

V. Conclusiones

Se concluye que es posible identificar en algunas producciones de estudiantes de tercer grado de secundaria de la educación básica indicios del tránsito del pensamiento algebraico, que ha sido recién construido por los estudiantes, al pensamiento matemático superior.

También se considera que esto fue posible gracias a la propuesta de ambientes de geometría dinámica, que contextualicen problemas con sentido para los estudiantes y que permitan la flexibilidad cognitiva para dicho tránsito.

Consideramos que el estudio del pensamiento matemático superior en la educación básica ofrece posibilidades para una intervención más pertinente en el bachillerato.

Referencias

[1] Skovmose, O. Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Bogotá, Una empresa docente, (1999).

[2] Filloy, E.; Rojano, T. "Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra", For the Learning of Mathematics, vol. 9, núm. 2, pp. 19-25. (1989)

[3] Butto, C.; Rojano, T. "Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría". Educación Matemática, vol. 16, núm. 1, abril, 2004, pp. 113-148. (2004)

[4] Godino, J.; Castro, W. y Aké, L. Distinción del pensamiento algebraico del aritmético en actividades matemáticas escolares. *CIAEM 2015*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.

[5] Artigue, M. "¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?" *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2 (2003)

[6] Azcárate, C.; Camacho, M. "Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático" *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2 (2003)

[7] Tall, D. The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495–511). New York: Macmillan.

[8] Doneddu, A. Álgebra y Geometría. Madrid: Aguilar (1978).

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Dificultades de los docentes en formación con el estudio de las cuadraturas de figuras planas y su trabajo áulico con base en la tipología didáctica de Brousseau

Francisco Guillermo Herrera Armendia*, Marcos Fajardo Rendón*, Isaac Villavicencio Gómez*, Marleny Hernández Escobar*
*Departamento de Matemáticas. Escuela Normal Superior de México. Cuerpo Académico "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica". Av. Manuel Salazar No. 201. Colonia Ex Hacienda Del Rosario. Ciudad de México.
harmendia@gmail.com, fajardoensm@gmail.com

***Resumen*- Se describen las principales dificultades que se observan en los estudiantes durante el proceso de enseñanza – aprendizaje con las que nos enfrentamos como docentes en la asignatura Figuras y Cuerpos Geométricos, al abordar el estudio de las cuadraturas de figuras planas propuesta por Hipócrates de Chios que incluyen al rectángulo, al triángulo de cualquier tipo, a los polígonos cualesquiera, un caso particular de lúnula y la cuadratura del círculo. La planificación didáctica la he basado en la aplicación de la Tipología Didáctica propuesta por Guy Brousseau.**

***Palabras Clave*- Cuadraturas, tipología didáctica, dificultades, porisma, problema**

***Abstract*- This paper describes the main difficulties observed in students during the teaching-learning process in the math classroom to approach the study of in the quadratures of plane figures proposed by Hippocrates of Chios, which include rectangle, triangle of any kind, polygons, and a particular case of lunule and the attempt of circle's quadrature using Brousseau's Theory of Didactical Situations.**

***Keywords*- Quadratures, didactic typology, math difficulties, porism, problems.**

I. Introducción

El Plan y Programa de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas (LESM) impartida en las instalaciones de la Escuela Normal Superior de México ENSM) , sustentados en el Acuerdo Secretarial No. 269 [1] mismo que establece los criterios para el desarrollo de competencias docentes de los estudiantes en formación inicial y cuyos resultados de las evaluaciones de los Exámenes Intermedio y General de Conocimientos, así como el Examen de Ingreso al Servicio Profesional Docente muestran que prácticamente un tercio de los estudiantes egresados del programa han desarrollado las competencias necesarias que les permiten obtener más de 1100 puntos en ellos (de los 1300 puntos ideales) en el Distrito Federal. Este instrumento de evaluación contiene dos rubros generales, a saber, la formación común y la formación específica en los que muestran evidencia del conjunto de rasgos del perfil de egreso de los estudiantes y que le permite ingresar al servicio profesional docente. En estos rasgos del perfil de egreso, se incluye el segundo conjunto, relacionado con: Dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria [2] y que en el apartado (b) del mismo se establece: "Tiene dominio del campo disciplinario de su especialidad para manejar con seguridad y fluidez los temas incluidos en los programas de estudio y reconoce la secuencia de los contenidos en los tres grados de la educación secundaria". El Mapa curricular que describe las asignaturas del Plan y Programas LESM incluye el estudio formal de la geometría plana y un acercamiento a las geometrías no euclidianas, en el espacio curricular denominado Figuras y Cuerpos Geométricos, con una carga horaria de 4 horas a la semana y con 7 créditos, cuyo temario incluye el estudio de las construcciones con regla y compás, análisis de figuras en el plano, diferentes estrategias para el cálculo de áreas, el estudio de las transformaciones en el plano y de los sólidos para finalizar con el estudio de otras geometrías, desarrollando sus competencias de análisis, observación, deducción y el manejo de la regla y el compás [3]. Un tema relevante e imprescindible en este estudio es el relacionado con las cuadraturas de cualquier rectángulo, triángulo y polígono dados, además de 1 caso particular de la lúnula y el intento de la cuadratura del círculo, todo con regla y compás propuestas por Hipócrates hace aproximadamente 2460 años. he organizado el presente artículo tomando en cuenta la propuesta de secuencias didácticas que incluyen, desde el punto de vista matemático, el problema, el teorema y el porisma [4], para el trabajo con los estudiantes, basado en la tipología de Brousseau [5]. Con base en las evidencias recabadas en los últimos años he identificado algunas dificultades presentadas por los estudiantes, además doy a conocer los resultados de la intervención docente para intentar solventarlas durante el proceso educativo centrado en el aprendizaje de los estudiantes.

La presente contribución es el resultado de mi trabajo docente en el aula de clases con estudiantes del cuarto semestre de LESM. Este curso se estudia en los segundos semestres de cada ciclo escolar, es decir entre febrero y junio de cada año, con dos grupos de estudiantes y un total de aproximadamente 45 estudiantes por ciclo escolar y una carga horaria total de 60 horas semestrales, con el propósito fundamental de contribuir al logro de los rasgos del Perfil de Egreso y además también con el propósito de contribuir a la Generación y Aplicación del conocimiento, de acuerdo con los lineamientos de los Cuerpos Académicos (CA), pues soy representante del CA "Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores y la Educación Básica" cuya primer LGAC se relaciona con la Teoría de las Situaciones Didácticas.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

En ese sentido, el objetivo del presente documento es compartir los resultados de mi experiencia docente en el rubro antes detallado y contribuir a la difusión de los procesos de investigación en la modalidad de Experiencia Áulica.

II. Referente Histórico

La discusión grupal sobre el problema de las cuadraturas la inicio, desde el punto de vista geométrico con otros problemas que incluyen la inscripción de algunos polígonos regulares, las demostraciones de las proposiciones 9 y 10 del libro I de Euclides, las proposiciones 6, 10, 11, 15 y 16 libro IV, [5], así como la distinción entre geometría pura y medición y cálculo geométrico en el sentido estricto, al trabajar la inscripción de un pentágono regular y la medición de uno de sus lados cuando el radio es igual a 1.

Además es necesario mencionar la diferencia entre un problema, un teorema y un porisma. La distinción que hizo Pappus [7] sobre estos conceptos geométricos conlleva a hacer notar que en aquella proposición denominada teorema es necesario ofrecer la demostración de lo que se enuncia, en el problema, se requiere de la construcción o trazo de lo que se escribe, y en un porisma se necesita de la búsqueda de elementos, rasgos o características geométricas de lo que se enuncia [4]. De esta forma, he observado que, al principio; los estudiantes no presentan grandes dificultades. Estas empiezan a observarse cuando empezamos a comentar la obra de Hipócrates [8]. De acuerdo con él, se piensa que Hipócrates de Chios fue el primer matemático cuyas demostraciones originales han llegado a nuestros días. Nace en Chios hace más o menos 2490 años. Hemos de hacer notar que muchos de los estudiantes cuestionan si se trata del padre de la medicina y creador del famoso juramento hipocrático. Sin embargo, este último nació en la Isla de Cos, muy próxima a Chios. Aristóteles escribió acerca de un talentoso geómetra que fue timado fácilmente por piratas, quienes le robaron su fortuna de la misma forma que alguien le roba un dulce a un niño [9]. Ese fue el estereotipo de Hipócrates. Pero lo sobresaliente es que se le atribuyen dos importantes contribuciones al pensamiento geométrico. La primera, es que desarrolló teoremas con una precisión lógica y geométrica únicas para su época lo que puede interpretarse como la primer versión de los Elementos pues los escribe a manera de axiomas o postulados, sin embargo, no se conserva algún documento al respecto, además de que un siglo después fue eclipsado por la maravillosa obra de Euclides, lo que no impide suponer que fue el predecesor de la obra conocida como Los Elementos. La otra aportación se relaciona con su propuesta de la cuadratura de la lúnula, documento que históricamente es tenue e indirecto, pues la referencia se extrae de los trabajos de Eudemo, hace aproximadamente 2, 235 años, citado por Simplicio hace 1550 años.

III. La Tipología Didáctica de Guy Brousseau

Didácticamente, es necesario aclarar que me he basado en la tipología didáctica, propuesta por el investigador galo Guy Brousseau, y que describe perfectamente la investigadora argentina Mabel Paniza, de quien retomo las definiciones propuestas [9].

Describe las fases de esta tipología, a saber: a) situación de acción, en la que los estudiantes actúan sobre un medio que puede ser simbólico (como el que se propuso) o material, con el propósito de que ellos recuperen conocimientos implícitos que poseen y que les permitan iniciar el trabajo (en este caso geométrico), de forma útil; b) situación de formulación, que consiste en promover, por parte del docente frente a grupo, el intercambio de información (geométrica) con el cuidado de que existan emisores (un estudiante o un equipo de ellos), y receptores (otro estudiante u otros equipos de ellos), generando mensajes con estricto contenido geométrico (pues fue el abordado en las sesiones), sin embargo se debe entender como contenido matemático en general, además, es importante comentar el papel del docente frente a grupo, cuya participación en ese momento consiste en monitorear la situación, en moderar los discursos, en observar el desenvolvimiento de los estudiantes, evitando en lo posible la participación directa; c) situación de validación, cuyo propósito es que los estudiantes emitan juicios sobre la verdad o falsedad de una propuesta del docente (que puede ser verdadera o falsa) y que motive la argumentación por parte de los estudiantes; d) la institucionalización, fase en la que, con base en los productos realizados por los estudiantes y el saber del docente frente a grupo, se lleguen a acuerdos sobre los conceptos, los teoremas, los axiomas, y demás ideas matemáticas que las instituciones han acordado a través de la historia.

IV. Metodología

De acuerdo con el plan de trabajo y tomando en cuenta los antecedentes geométricos descritos anteriormente, decidí continuar el tema de las cuadraturas utilizando la situación de acción, y desde el punto de vista geométrico, el problema. Continuamos con la discusión del término "cuadratura", término que no ofreció dificultad en cuanto a su significado en los estudiantes.

Recordemos que los griegos fueron atraídos mucho por el concepto de simetría, a causa de su belleza visual y su sutil estructura lógica, pues observaron que lo simple y elemental conlleva a fundamentar lo complejo e intrincado, sin pasar por alto que las construcciones geométricas para ellos requería únicamente del uso de la regla y el compás. Estos dos instrumentos les debían permitir realizar construcciones de forma perfecta y uniforme en una dimensión (la línea recta) así como la figura perfecta de dos dimensiones (el círculo), aunque el uso de estos instrumentos tecnológicos tuviese limitantes, como el Hecho de no poder trazar la parábola, no obstante, en manos de los ingeniosos y talentosos estudiosos de la época se realizaron gran variedad de construcciones, como la bisección de ángulos, el trazo de paralelas y perpendiculares, la creación de polígonos regulares de gran belleza.

Así, el reto a vencer hace 2, 400 años era cuadrar figuras planas. "La cuadratura de figuras planas en la construcción, sólo con regla y compás, de un cuadrado cuya área es igual al área de la figura plana original. Si esto se puede lograr, decimos que la figura original es cuadrable" [8].

Para la época, la aplicación tuvo tintes prácticos cuando se trataba de cuadrar figuras planas irregulares, además de representar todo un reto, aunque la fascinación por la

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

cuadraturas fue más allá, debido a la imposición de la simetría regular del cuadrado, condición que carece una figura plana irregular, además de la idea de reemplazar lo asimétrico por lo simétrico, lo imperfecto por lo perfecto.

El problema de la cuadratura del rectángulo, está incluido en la proposición 14 del Libro II de Los Elementos, sin embargo, al abordarse con base en la situación de acción, fui proponiendo el trazo necesario para lograrlo, por ejemplo, se indicó el trazo de un rectángulo cualquiera (teniendo cuidado de sugerirles que lo hicieran en la mitad de la hoja de su cuaderno para dejar espacio suficiente y completar el problema.

Como el presente artículo no tiene la intención de volver a mostrar a los lectores la solución a estos problemas, sino más bien describir el trabajo áulico, me remito a dar a conocer las dificultades de los estudiantes con relación al trabajo geométrico y la intervención docente basada en la tipología didáctica descrita.

Realmente en este problema no se observaron dificultades, sino más bien en su demostración, pues es necesario hacer que los estudiantes observen y sepan aislar los componentes de la figura que ellos mismos trazaron. Dos razones fundamentales que sustentan las afirmaciones en esta demostración son: la proposición 13 del Libro VI (relacionada con la media proporcional de dos segmentos de recta) y la proposición 47 de libro I (relacionada con el Teorema de Pitágoras).

Es un Hecho que para realizar una demostración rigurosa en geometría, es necesario el uso de la memoria para así ofrecer razones correctas a las afirmaciones, sin embargo, la gran mayoría de los estudiantes manifiesta tener poca o nula experiencia con los problemas y los teoremas geométricos y definitivamente nulos con relación a los porismas.

Los estudiantes que han realizado cursos de dibujo técnico tienen facilidad para abordar los problemas, pero no así las demostraciones.

El trabajo docente se vuelve importante, al motivar la observación, al generar preguntas apropiadas para que los estudiantes puedan "ver" lo que la figura "esconde". Sobre todo cuando se llega al momento de describir los radios que están implícitos en el trazo, y que uno de ellos es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyo cateto mayor es el trazo final de Euclides VI, 13; otro momento importante de la demostración es cuando se hace "ver" a los estudiantes que la adición de uno de los radios con el cateto menor del triángulo rectángulo multiplicado por la sustracción del otro radio con ese mismo cateto menor, *(que representan la base y la altura del rectángulo*) es, en realidad Euclides I, 47 y que da fundamento final a la cuadratura del rectángulo, pues la adición representa la base y la sustracción la altura del rectángulo inicial, como se describe en la figura 1.

he combinado en esta parte, la aplicación de la tipología de formulación, al pedir a algún estudiante que observe detenidamente, por ejemplo, los radios trazados en el problema y que genere preguntas a otro compañero con relación a su observación en el trazo completo, conjugando lo anterior con la situación de validación, en la que propongo a los estudiantes afirmaciones falsas (como afirmar que la hipotenusa del triángulo rectángulo formado no une el punto medio necesario en Euclides VI, 13) o verdaderas (*por ejemplo que recuerden el Teorema de Pitágoras*).

Aquí, las dificultades observadas son: que los estudiantes no tienen la costumbre de generar preguntas a sus compañeros (pues en todo caso, las generan al docente), no están acostumbrados a tener un diálogo o un debate sano con sus compañeros, manifestando que es un tanto por temor a no saber qué preguntar o a realizar cuestionamientos demasiado fáciles o ingenuos e inclusive fuera del tema.

Fig. 1- Trazo realizado por un estudiante. Se aprecia la construcción de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es uno de los tres radios del semicírculo formado, cuyo cateto mayor es el lado del cuadrado cuya área es la del rectángulo propuesto (en color azul). Ese lado se trazó al aplicar Euclides VI, 13. La demostración consiste en observar y deducir a partir del producto geométrico de la adición geométrica del radio situado a la izquierda del semicírculo con el cateto menor del triángulo formado y la sustracción geométrica del radio situado a la derecha del semicírculo con ese mismo cateto menor del mencionado triángulo, y aplicando Euclides I, 47, y vinculado desde luego con la expresión del área de todo rectángulo. En la página siguiente, la demostración.

Por otro lado, los estudiantes que responden (tímidamente) a sus compañeros, siempre han buscado la validación de su profesor, cuando son los mismos estudiantes quienes deben hacerlo pues la fase así lo requiere. Otra dificultad se relaciona con que los estudiantes no logran percibir, visualmente, que el cuadrado construido tiene realmente la misma área que el rectángulo inicial del problema, recurriendo en muchos casos, a la verificación con el uso de la escuadra graduada.

Una vez comprendido este problema, los otros dos, (triángulo y polígonos cualquiera) propuestos por Hipócrates siguen la misma temática en la demostración.

El siguiente problema retomado del trabajo de Hipócrates se relaciona con la cuadratura de cualquier triángulo. En esta parte de la secuencia didáctica planifiqué abordarlo con la situación de formulación desde el principio. La propuesta se abordó así: "Construir un triángulo cuya área sea igual con la de un rectángulo dado". Al principio, los estudiantes normalmente empiezan por trabajar individualmente, concentrados en el problema, de vez en vez, se reúnen por parejas. Al insistir que se trata de que lo resuelvan conjuntamente, empiezo a motivar a que algunos inicien los cuestionamientos a otros, pero una vez iniciados éstos, he observado una dificultad: la forma de representar en el trazo lo que es bien conocido, es decir, la mitad del rectángulo. Pasados algunos minutos, la fuente de mensajes se intensifica, y es aquí donde les insisto que deben utilizar la mayor cantidad de conceptos geométricos. Algunos proponen al grupo cuadrar el rectángulo y al obtener el cuadrado, escoger una mitad trazando una diagonal, que es la que debería representar al triángulo solicitado, y normalmente empieza un debate sobre si es o no el método correcto. Muchos solicitan mi intervención para que valide procedimientos, pero les

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

insisto en que en esta situación didáctica lo que se pretende es la emisión – recepción de códigos geométricos por parte de ellos. Así es que intentan validar sus propuestas sin ser éstas la correcta, sin embargo el ejercicio es sumamente enriquecedor con relación al desarrollo de competencias geométricas gracias al proceso de comunicación antes descrito. Después de por lo menos 25 minutos de la aplicación de la situación de formulación, he optado por sugerir la observación de la expresión matemática que permite el cálculo del área de todo triángulo: $\frac{ba}{2}$, y que se analice una expresión equivalente y que signifique lo mismo. Después de algunos intentos, ellos terminan por proponer:

a) $\frac{b}{2} * a$ y b) $b * \frac{a}{2}$ y mi labor ahora es generar en ellos la seguridad de escoger la mejor. Para ello cuestiono lo que sucedería en el trazo si escogemos el inciso (a), al aplicar Euclides I, 10, por lo que el grueso del grupo ha optado por el inciso (b), que es el sugerido por Hipócrates, es decir, bisecar el lado que representa la base del rectángulo y proceder igual que en la cuadratura del rectángulo, como se describe en la figura 2.

La siguiente propuesta de Hipócrates es la cuadratura de cualquier polígono, y lo he abordado normalmente como un porisma [4] al ofrecer el siguiente enunciado: "Todo polígono es cuadrable", además me apoyé en la situación de formulación, misma que he observado se reafirma de manera sorprendente. El único comentario que les mencioné fue que se apoyaran en la solución de los dos problemas anteriores. La primera dificultada que he observado se relaciona con el trazo de algún polígono por parte de los estudiantes, pues la gran mayoría traza polígonos regulares. Para solventar esta dificultar, les cuestiono sobre la clasificación de los tipos de polígonos (convexos y cóncavos), y así, muchos ya optan por trazar polígonos cóncavos irregulares y otros continúan con los polígonos convexos regulares, sin embargo la propuesta se refería a "todo polígono", así que eso completaba la clasificación.

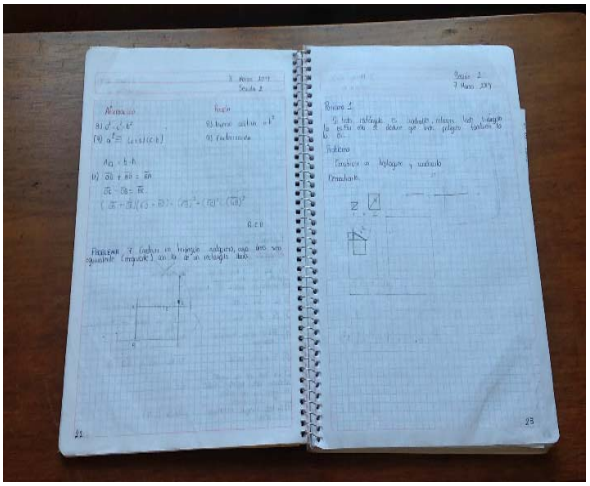


Fig. 2 -Se observa los intentos de un estudiante por dar la solución al problema de la cuadratura de todo triángulo. Como se aprecia en la página derecha, un primer intento fue cuadrar el rectángulo y después trazar la diagonal para así obtener el triángulo solicitado. La dificultad observada se relaciona con la aplicación de Euclides I, 10 al segmento de recta que representa la altura del rectángulo dado.

Otra dificultad observada ha tenido que ver con la manera de relacionar las cuadraturas del rectángulo y del triángulo cualquiera con la inspección llana del polígono que han trazado. Aquí es donde va tomando gran valor de aprendizaje la situación de formulación, pues entre ellos mismos, normalmente, llegan a la conclusión, después de algunos minutos, que es necesario triangular el polígono que cada quien construyó, es decir, unir los vértices del polígono para formar triángulos, y partiendo de que todo triángulo es cuadrable, entonces también lo es cualquier polígono. La siguiente dificultad que sale a flote es la localización de las alturas de los triángulos que forman el polígono, dificultad que sólo he observado en trazos como éste (figura 2), pues cuando se analiza por separado un triángulo cualquiera y se pide se localice su altura, no existe dificultad alguna, así que entre ellos se propusieron "extraer" del trazo uno de los triángulos y localizar su altura. Aquí mi intervención era realmente de monitoreo ya ni siquiera de guía de la actividad, pues los docentes en formación ya asimilan el objetivo de la situación didáctica y aunque todavía se observa algo de timidez en algunos, la gran mayoría participa como verdadero emisor – receptor. De este modo, procedieron a la cuadratura individual de cada triángulo, de acuerdo con lo estudiado, trazando cada quien los cuadrados correspondientes y es aquí donde ha surgido una dificultad más: cómo cuadrar cuadrados. Debo comentar que normalmente los estudiantes insisten en la validación por parte del profesor con relación a las propuestas que ellos hacen, sin embargo debe insistirse en el gran valor de la situación de formulación, así que les dejé ahora si, solos en cuanto a redescubrir qué hacer para obtener el cuadrado final cuya área es la de todos los otros trazados. Pasado algún tiempo, y a veces desesperándose por mi falta de intervención, proponen que es necesario aplicar Euclides I, 47 a dos cuadrados cuyos lados representan los catetos y así trazar la hipotenusa que representa el lado de otro cuadrado cuya área es igual a la de los dos primeros, después el lado de ese último cuadrado y el lado del que sigue serán ahora los catetos, procediendo del mismo modo hasta obtener el cuadrado cuya área es igual a la del polígono propuesto inicialmente, como se describe en la figura 3.

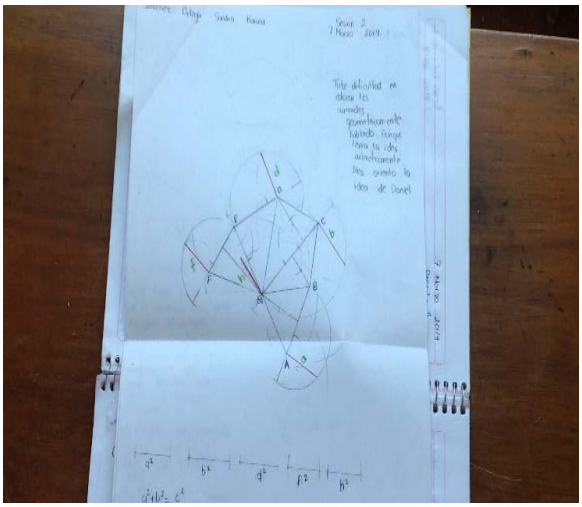


Fig. 3- Trazo de un estudiante que esquematiza la cuadratura de el polígono propuesto. Las principales dificultades que se han observado son: a) la triangulación del polígono propuesto; b) localización de las alturas de los

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

triángulos obtenidos y observados en su conjunto; c) el trazo del cuadrado final cuya área es igual a la del polígono propuesto.

El siguiente es uno de los grandes teoremas propuestos por Hipócrates [8] y se refiere a la cuadratura de un caso particular de lúnula. De acuerdo con mi plan de trabajo, lo he abordado como una situación de validación. Para ello les solicito tracen un semicírculo cualquiera, apliquen Euclides I, 10 a su diámetro y hagan que ese punto se prolongue hasta intersecar la circunferencia, y que unan cada extremo del diámetro con ese punto de intersección final. Entonces se forma un ángulo inscrito, y propongo la primera afirmación (que es falsa): El ángulo inscrito ∢ACB formado en el trazo no es ángulo recto (ver figura 4). Y aunque la gran mayoría de los estudiantes menciona que es falsa esa afirmación, no dan una argumentación al respecto, siendo esta una dificultad observada, pues no dan importancia a la memorización de axiomas y postulados que son necesarios para emitir un juicio que valide una afirmación. Desde el inicio del curso les sugiero bibliografía especializada y les invito a que la estudien y memoricen gradualmente, o al menos sepan localizar rápidamente alguna proposición con la inspección oportuna de ella. Normalmente los estudiantes recurren a la Euclides, del Instituto de Bachillerato a Distancia de Guipúzcoa (cuyo correo electrónico es: jnavarrolo@euskalnet.net), gran apoyo para los estudiantes pues el autor sintetiza apropiadamente las proposiciones euclidianas, haciendo posible su rápida localización contribuyendo a que la situación de validación se lleve de forma eficaz con la revisión del texto de Juan Navarro Loidi: Los "Elementos" de Euclides. Como ya se había trabajado este texto, no tardaron tanto en validar que el ángulo ∢ACB realmente sí es recto.

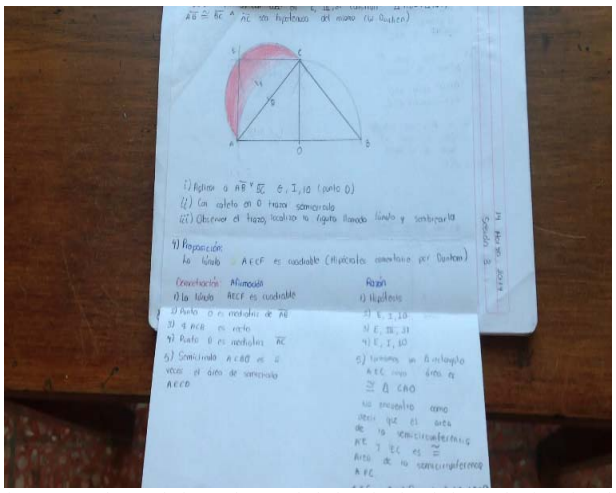


Fig. 4 -Para el caso de la cuadratura de la lúnula abordada con la situación de validación, la dificultad observada se relacionada con la falta de memorización de axiomas y postulados, y muy concretamente para este caso la noción común número 3 de Los Elementos.

A continuación les solicito que tomen como diámetro cualquiera de los lados del ángulo formado y tracen una semicircunferencia sobre él. La siguiente afirmación (falsa también) es la siguiente: "El área del semicírculo ACB es tres veces el área del semicírculo AEC". La dificultad que he observado en los estudiantes se relaciona con el hecho de medir las áreas respectivas. Muchos asignaron valores, en su mayoría la unidad al diámetro AB de la figura, y utilizando las expresiones adecuadas como el Euclides I, 47 para encontrar el valor del diámetro AC, y la expresión: πr^2 con los valores apropiados, llegaron a la conclusión de que la afirmación nuevamente era falsa, pues la relación entre ambos semicírculos es 2 a 1, es decir que el semicírculo ACB es el doble del semicírculo AEC. Otros estudiantes intentaron localizar la proposición adecuada sin lograrlo, proposición que corresponde al libro XII, 2 de Euclides. A continuación les solicito que coloreen la región plana AECF cuyo nombre es Lúnula. La demostración se basa en la observación de la figura, y para ello solo realicé afirmaciones verdaderas: "El cuadrante ACO es igual al área del semicírculo AEC," por Euclides XII, 2; "si al cuadrante ACO sustraigo el área del sector circular AFCD, y al semicírculo AEC también sustraigo esa misma área del sector circular, entonces el área del triángulo rectángulo isósceles ACO es igual al área de la lúnula AECF". La dificultad es también memorística, pues no lograron encontrar con rapidez el argumento que permitiera aceptar o rechazar mi afirmación. Algún tiempo después encontraron en el texto de Navarro, que la Noción común número 3, de Euclides es la adecuada. La conclusión grupal fue que si el área del triángulo es igual a la de la lúnula propuesta y todo triángulo es cuadrable, entonces la lúnula propuesta lo es también.

Finalmente, se estudió el intento de la cuadratura del círculo. Normalmente inicio esta parte de la secuencia didáctica con el breve comentario referente al éxito que tuvo Hipócrates al cuadrar figuras curvilíneas, y que con ello posteriormente muchos matemáticos griegos le atribuyeron el intento de cuadrar la más perfecta de todas las figuras planas, el círculo. Simplicio escribió hace unos 2,210 años que Hipócrates había asegurado que pudo cuadrar el círculo [8]. Propuse trabajar con las situaciones de formulación y validación, en ese orden, pues los estudiantes normalmente se han adaptado a este tipo de trabajo áulico. Les pedí que trazaran un círculo con diámetro AB, y bajo el otro círculo pero con radio AB, de modo que los diámetros están en relación 1 a 2. A continuación solicité aplicar Euclides IV, 15 de modo que ahora, cada lado del Hexágono regular inscrito fuese el diámetro de seis semicírculos sobre los que se sombrearían las lúnulas respectivas (ver figura 5). Para la situación de formulación propuse que se emitiesen códigos relacionados con la propuesta de algún método que permitiese cuadrar el círculo con diámetro AB, con regla y compás. Los comentarios entre ellos se concretaron a afirmar que era imposible lograrlo con la tecnología de la regla y el compás, pero que sabían de otros métodos distintos para lograrlo. Aquí puedo decir que he logrado en buena parte adaptar a mis estudiantes al trabajo con la formulación usualmente cuando llego a esta parte de mi secuencia didáctica. Para terminar mi secuencia didáctica les dicté textualmente la propuesta escrita en el texto de Dunham [8] para solicitarles que la validaran:

"El área del Hexágono más tres veces el área del círculo sobre AB es igual al área del círculo mayor más el área de las seis lúnulas.

El área del círculo mayor, cuyo diámetro es el doble del menor, es 4 veces el área del círculo menor. Por ello:

"El área del Hexágono más tres veces el área del círculo sobre AB es igual a 4 veces el área del círculo mayor más el área de las seis lúnulas.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Si sustraemos "3 veces el área del círculo con diámetro AB" a ambos lados de la expresión anterior, tenemos:
Área del Hexágono es igual al área del círculo menor más el área de las seis lúnulas, o, el área del círculo menor (con diámetro AB) es igual al área del Hexágono menos el área de las seis lúnulas y dado que las lúnulas son cuadrables, el círculo también lo es. ".
A continuación expongo brevemente el razonamiento hipocrático. "Alexander, lector de Hipócrates debió razonar que el Hexágono al ser polígono es cuadrable, así como también cada lúnula; de tal forma que por procesos aditivos, se puede trazar un cuadrado cuya área es la suma del área de la media docena de lúnulas.
Así que el círculo cuyo diámetro es AB se puede cuadrar [10] por el simple proceso de sustraer las áreas mencionadas". Al ser una situación de validación nótese que mi dictado fue en lenguaje natural y no en lenguaje simbólico. Lo que hicieron, muy bien por cierto, fue simbolizar las afirmaciones del texto de Dunham. La dificultad que he observado se relaciona con que la mayoría de los estudiantes intenta validar utilizando técnicas de medición y cálculo geométrico; es decir asignar valores a los diámetros y proceder con la aplicación de expresiones numéricas; es decir que el pensamiento geométrico puro no está todavía desarrollado, si bien ya se tienen avances importantes.
Lo que debe hacerse es observar que el triángulo utilizado por Hipócrates para cuadrar un caso de lúnula, es rectángulo isósceles y el que se propone para el círculo es equilátero, ambos con propiedades diferentes, por ello, no es posible lograr la cuadratura del círculo con regla y compás.

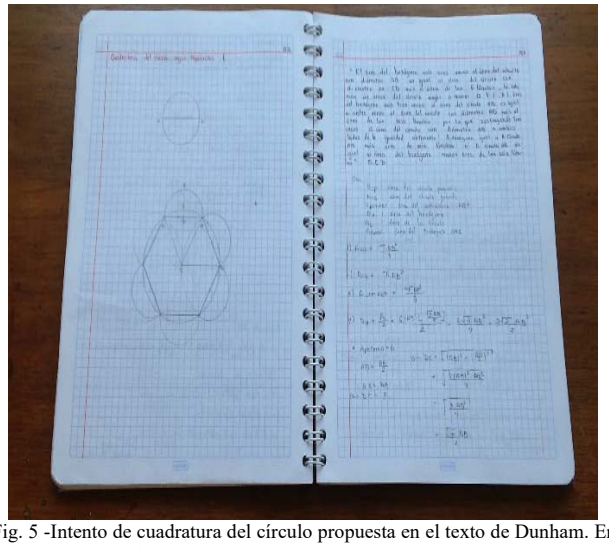


Fig. 5 -Intento de cuadratura del círculo propuesta en el texto de Dunham. En la página izquierda se aprecia el problema (la construcción). En la página siguiente, la dificultad para su demostración geométrica, pues la mayoría de los estudiantes recurre al uso de la medición y el cálculo geométrico, más que a la deducción misma, pues basta con observar el triángulo rectángulo isósceles en la cuadratura de un caso de lúnula y los triángulos rectángulos equiláteros en el intento de cuadrar el círculo con diámetro AB.

V. Conclusiones

he descrito las principales dificultades observadas en los docentes en formación durante algunos años de coordinar el especio curricular denominado Figuras y Cuerpos geométricos, al estudiar las cuadraturas de figuras planas propuestas por Hipócrates, con el diseño y aplicación de secuencias didácticas basadas en el uso de la tipología didáctica de Brousseau. Estas dificultades son comunes a los estudiantes, en mayor o menor grado, siempre se presentan y conforme avanza el semestre éstas se van superando poco a poco. Con relación a la aplicación de la tipología de Brousseau, debo decir que es de gran ayuda, que realmente permite darle utilidad al papel del estudiante, del docente, de la bibliografía sugerida e incluso, de los planes y programas, pues estos no siempre están bien diseñados. A pesar de que el estudio de la geometría no ocupa el interés que debe, puesto que el constructo matemático ha empezado con la geometría, (en el plan de estudios en México sólo se dedican tres asignaturas a su estudio: Figuras y Cuerpos Geométricos; Escalas y Semejanza; Medición y Cálculo geométrico) en las escuelas formadoras de docentes, la actitud que he observado tanto en docentes como en estudiantes permite subsanar un tanto esta carencia.

REFERENCIAS

[1] Diario Oficial de la Federación. Secretaría de Educación Pública. (2000). Acuerdo Número 269. Por el que se establece el Plan de Estudios para la Formación Inicial de Profesores de Educación Secundaria. Publicado el jueves 11 de mayo de 2000. México.

[2] Diario Oficial de la Federación. Secretaría de Educación Pública. (1999). Acuerdo Número 261 Por el que se establecen criterios y normas de evaluación del aprendizaje de los estudios de Licenciatura para la formación de Profesores de Educación Básica. Publicado el 1 de octubre de 1999. México.

[3] Secretaría de Educación Pública (2001). Figuras y Cuerpos Geométricos. Temario y Bibliografía sugerida. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento de las Escuelas Normales. México.

[4] Fernández, Diego; García-Campos Montserrat; Martínez, Carmen; Martínez Iker; Pérez, Karla; Rodríguez, Andrés; Ruíz, Marinie. (2012). Sobre un porisma de Euclides y su dualización. Miscelánea Matemática. Número 54, mes de Abril. Sociedad Matemática Mexicana.

[5] Brousseau, Guy. (1980). Theory of Didactical Situations. Kluwer. N. Y.

[6] Heath, Thomas. (1956). Euclid. The Thirteen Books of THe Elements. Vols. I – III. Dover Publications Inc. New York.

[7] Cuomo, S (2004). Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity. Cambridge University Press. Cambridge, U. K.

[8] Dunham, William. (1990). Journey Through Genius. The Great Theorems of MatHematics. John Wiley and Sons Inc. Camp Hill, PA.

[9] Manteca Aguirre, Esteban (Coordinador Editorial). (1999). Licenciatura en Educación Secundaria. Plan de estudios 1999. Documentos Básicos. Secretaría de Educación Pública. México.

[9] Panizza, M. (2004). Conceptos Básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en: Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.: Análisis y Propuestas. Paidos, pp.59- 71.

[10] Puertas Castaños, María Luisa. (2007). Euclides. Elementos. Vols. 1 – 3. Biblioteca Clásica Gredos. Editorial Gredos, S. A. Madrid. .

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen I"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Teoría vs. Realidad

Dulce Carolina Ruiz Castañeda[1]
[1]Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201, Hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 Ciudad de México, Distrito Federal.
dulyto.26@gmail.com

***Resumen*- La Escuela Normal Superior de México, en la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas se tiene por asignatura "Observación y Práctica Docente I" donde el principal objetivo es practicar en una escuela de nivel secundaria, dicha experiencia da la oportunidad de que el docente en formación se ponga a prueba con los retos que en verdad se viven en la práctica docente. Finalizadas ya dichas jornadas los profesores en formación tienen la oportunidad de analizar lo hecho en esas dos semanas y crear una crítica constructiva sobre lo que pudieron apreciar de la vida escolar actual.**

***Palabras clave*- Docente, alumnos, enseñanza, aprendizaje, paradigma, conductismo, constructivismo**

***Abstract*- Escuela Normal Superior de México offers Educative Program of Bachelor in Elementary Education with a major in Mathematics. The main subject of this is related with "Observation and teaching practice I", course where the main objective is to practice in a school in secondary level, this experience gives the opportunity to the teacher in training to test the challenges to live in the teaching practice. Once the students finished this training period, they have the opportunity to analyze what has been done in those two weeks, and create a constructive criticism about what they've been able to appreciate the teacher life at current school.**

***Key words*- Teachers, students, teaching, learning, paradigm, behavior, constructivism.**

I. Introducción

La educación no es un hecho aislado de la sociedad, es un medio por el cual se preparan a las nuevas generaciones para adaptarse a la comunidad a la que pertenecen, es por ello que muchas de las ciencias que existen se relacionan estrechamente a la enseñanza, como la psicología donde se estudian los procesos mentales que se realizan para poder aprender y las ciencias sociales -*antropología, sociología, derecho, entre otras*- que investigan las condiciones que intervienen en el aprendizaje de los alumnos.

En las ciencias sociales siempre han existido paradigmas, según Kuhn "la teoría, la investigación y la acción científica están sujetas a reglas y normas implícitas o explicitas derivadas de un paradigma" [1], por lo que se puede decir que los paradigmas son"modelos de acción y reflexión para hacer ciencia" [2]. En la educación pasa lo mismo, los paradigmas son guías de lo que se debe de hacer en el aula, ya que estos proponen: una evaluación, un tipo de docente y uno de alumno, y dan su punto de vista sobre el aprendizaje y de la enseñanza, entre otras. Sin duda alguna el modelo que más ha estado presente en la enseñanza es el del conductismo, en donde a cada estimulo corresponde una respuesta y se ve aun presente en acciones comunes de la vida escolar como son: las calificaciones y los castigos, en si dicho arquetipo se basa en las teorías psicológicas de Watson del conductismo. Sin embargo, en la actualidad hay un choque entre este modelo y el nuevo paradigma que se está estableciendo en la educación, que es el constructivismo, el cual "es una posición respecto de los mecanismos productivos de los conocimientos, que pone el acento en la interacción sujeto/objeto" [3], es decir esta nueva propuesta establece que es importante que el alumno se apoye de sus conocimientos previos para construir nuevos y así pueda volverse autónomo en su aprendizaje poco a poco.

Con todo lo mencionado es evidente el conflicto que hay entre estos prototipos, puesto que uno cree firmemente en condicionar a los alumnos mediante premios y castigos, y el otro afirma que para que haya un aprendizaje el estudiante debe de sufrir un "desequilibrio (conflicto cognitivo) entre lo que el alumno ya sabe y el nuevo conocimiento que se le propone y un reequilibrio posterior" [4], estudios actuales apoyan a la teoría del constructivismo, pero este no se ha podido implementar en las escuelas ya que el conductismo se encuentra fuertemente arraigado en la enseñanza e intentar cambiar estas nociones llega a causar problemas a los docentes, ya que los directivos, los compañeros y los propios

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

estudiantes se resisten a dicho cambio y en muchos casos la comodidad y el sistema causa que un nuevo docente desista de sus ideas y caiga en la monotonía de transmitir solo el conocimiento.

Por todo lo mencionado, en el presente trabajo se hará una crítica sobre lo acostumbrados que llegan a estar los alumnos a la enseñanza tradicional, y lo difícil que puede llegar a ser cambiar el estilo de trabajo, por la fuerte resistencia que pueden tener los estudiantes o por que los educandos llegan a creer que el construir su propio conocimiento es más un juego que una enseñanza significativa.

De la misma forma se analizaran las teorías del conductismo educativo, ya que este modelo es el que más presente se encuentra, y se puede hallar disfrazado de otro paradigma. Todo esto se verá con base a las prácticas realizadas del 25 de noviembre al 6 de diciembre del 2013, en la escuela secundaria Técnica N° 24 "Felipe Carrillo Puerto"

II. Marco referencial

La educación tiene como fin lograr preparar a los estudiantes, para que puedan afrontar lo que les espera en la sociedad en la que se desarrollan o en el mundo laboral. Es por ello que en este campo se han realizado varios estudios para saber qué modelo se debería seguir para lograr dicha meta; este es sin duda un tema de gran importancia, ya que si no se logra el propósito de la educación, las nuevas generaciones tendrían un conflicto interno por entrar tan bruscamente a una sociedad regida por normas, reglas, conocimientos, relaciones interpersonales, entre otras cosas; elementos que de una u otra forma las escuelas inculcan en los alumnos para que se adapten a la realidad que se vive.

Si bien son muchos los paradigmas que hay en la educación son dos los que más llaman la atención por sus bases teóricas y por lo que proponen, y a continuación se mencionan, pero antes aclaremos de manera clara que es un modelo pedagógico -*paradigmas*- el cual"tiene su fundamento en los modelos psicológicos del proceso de aprendizaje, en los modelos sociológicos, comunicativos, ecológicos o gnoseológico" [5], pero estas guías no se pueden establecer de igual manera en todo un país, ni siquiera en un municipio, puesto que "La multitud de formas de concebir el proceso enseñanza-aprendizaje, los contenidos, su organización, las técnicas, los materiales, la evaluación y la relación entre los distintos actores se desprenden de las distintas concepciones de aprendizaje, así como de la concepción de ser humano y de sociedad que se desean formar a través de los centros académicos" [6], por ejemplo una comunidad donde viven puros profesionalitas le van a exigir a las escuelas de ahí, un alto nivel educativo y que en las pruebas obtengan los mejores lugares, en cambio una comunidad rural o de obreros van a pedir que su escuela les enseñen lo que se pueda, pero especialmente que los cuide, y los aleje de las malas influencias de las calles. Son muchos los ideales que se tienen sobre la educación unos los ven como una pérdida de tiempo, otros un medio para mejorar su calidad de vida, y algunos como la salvación de todo un país, entre otras ideas. Y todos estos pensamientos pueden hacer que un paradigma sirva o no.

El primer modelo que se verá es el del conductismo, el cual tiene un importante papel en la educación, debido a que esta corriente psicológica se encontraba presente cuando se empezó a prestar atención a la instrucción, es por ello que elementos conductistas como castigo –*llamar a los padres, bajas calificaciones, cambiar de lugar, en honores pasar a los estudiantes inquietos adelante, entre otras*- y premio –*buenas calificaciones, el cuadro de honor, reconocimientos, diplomas, dejar el control del grupo en sus manos, entre otras*- son tan importantes que no se puede ver a la enseñanza sin ellos. El conductismo educativo piensa firmemente que "El aprendizaje se produce por la asociación entre un estímulo determinado y una respuesta dada por la persona; las respuestas seguidas por un refuerzo tendrán mayor probabilidad de presentarse en el futuro, mientras que aquellas seguidas por un castigo se extinguirán. Desde el punto de vista educativo, en el proceso de enseñanza los estímulos ambientales son fundamentales, se evalúa al alumno para determinar el nivel en que se iniciará la instrucción e identificar los refuerzos y castigos más efectivos. Durante todo este proceso quien aprende tiene un rol pasivo" [7]. Como se puede ver estas ideas son las que se encuentran presentes en la educación tradicionalista.

Por otro lado el constructivismo "considera que el aprendizaje consiste en la construcción de significados que lleva a cabo la persona a partir de sus experiencias, lo que le permite realizar interpretaciones de la realidad. Como parte de los

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

principios aplicados en el campo educativo se encuentran: la consideración de que para producir aprendizajes es necesario situar al alumno en contextos naturales y significativos, en donde las habilidades sean tanto aprendidas como aplicadas; el rol activo del estudiante en la aplicación de lo aprendido y en la construcción de significados; la presentación de la información de variadas maneras y por medio de distintas experiencias; el desarrollo de habilidades para resolver problemas y hacer un uso efectivo de la información; el acento que se debe poner en la transferencia de lo aprendido a otros contextos y la consideración de que el papel de la enseñanza consiste en mostrar a los estudiantes cómo construir significados y, al mismo tiempo, cómo evaluar y actualizar estas construcciones" [8]. Con base en esto, se puede decir que las propuestas de esta corriente no son las alocadas, porque se pone énfasis en que sea el estudiante el que haga su propio conocimiento y así este saber nuevo sea significativo para él, ya que viene de sus conocimientos previos y del contexto en el que se desarrolla. Además este modelo se relaciona con el paradigma cognoscitivo, puesto que ambos ven que el aprendizaje se debe basar en las experiencias del alumno, que el papel del profesor es ser una guía y trabajan con un concepto que hoy en día es muy mencionado *–hasta en textos oficiales-* y es el aprendizaje significativo [9] que es "el que procura establecer vínculos sustantivos (no arbitrarios) entre el contenido por aprender y lo que la persona ya sabe (sus conocimientos previos)" [10].

Sin duda alguna es importante que los docentes se basen en el modelo constructivista *–que incluye al cognitivo-* ya que para los alumnos le es claro el conocimiento, porque lo relacionan con lo que ya saben y les importa aprenderlo debido a que les va a ser útil en su vida diaria, es decir no es algo ajeno de su realidad, sin embargo al ser el conductismo un elemento tan arraigado en la enseñanza no se le puede dejar completamente de lado, será cuestión de cada docente tomar los elementos de este modelo, que considere le servirán en su práctica docente.

III. Marco teórico

Los paradigmas de la educación, se aplican en todas las disciplinas, en este apartado nos enfocaremos en los modelos pedagógicos aplicados en las Matemáticas.

Las matemáticas siempre han sido la asignatura más odiada por los alumnos, esto se debe principalmente a la complejidad que esta tiene y en su modo de enseñanza, sin embargo esta es una materia de gran importancia y es la base para conocimientos más complejos como la física, química, biología, entre otras; es por ello que ha causado preocupación buscar la manera más adecuada para que los estudiantes la comprendan y la sepan manejar.

Sin duda alguna el modelo que más ha regido a las matemáticas es el conductista, y esto se debe a que los actores de la educación siempre han visto a esta disciplina como algo abstracto en donde dinámicas interactivas no se podrían aplicar, sin embargo el modelo constructivista muestra todo lo contrario, actualmente existen teorías matemáticas que apelan al descubrimiento del conocimiento, es decir, buscan que el alumno llegue a enunciar por sí mismo fórmulas matemáticas, para que así estas tengan un mayor impacto en los estudiantes y sepan el origen de estas.

Una de las principales teorías matemáticas constructivistas es la del estudio de la Didáctica de Matemáticas, hecha por el profesor e investigador Guy Brousseau, la cual enuncia principalmente lo siguiente: "El objeto de estudio de la Didáctica de Matemáticas es la situación didáctica… Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio -*que comprende eventualmente instrumentos u objetos-* y un sistema educativo -*representado por el profesor-* con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución Estas relaciones se establecen a través de una negociación entre maestro y alumnos cuyo resultado ha sido designado como contrato didáctico. Este contrato, con componentes explícitos e implícitos, define las reglas de funcionamiento dentro de la situación… La presencia de un contexto escolar no es esencial en la definición de una situación didáctica; lo que sí es esencial es su carácter intencional, el haber sido construido con el propósito explícito de que alguien aprenda algo.

El objetivo fundamental de la Didáctica de las Matemáticas es averiguar cómo funcionan las situaciones didácticas, es decir, cuáles de las características de cada situación resultan determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y,

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

subsecuentemente, de sus conocimientos. Esto no significa que sólo interese analizar las situaciones didácticas exitosas. Incluso si una situación didáctica fracasa en su propósito de enseñar algo, su análisis puede constituir un aporte a la Didáctica, si permite identificar los aspectos de la situación que resultaron determinantes de su fracaso.
Siendo las situaciones didácticas el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas ha sido necesario desarrollar una metodología para analizarlas.

Es frecuente que los investigadores que han llegado a la experimentación educativa con una formación previa en psicología diseñen situaciones didácticas, las pongan a prueba en una o varias aulas, y luego centren su interés en los comportamientos manifestados por los alumnos, dentro de la situación experimental. No intentan explicar estos comportamientos, o su evolución, en función de las características particulares de la situación en la que se produjeron. Ignoran si, variando algunas condiciones de la situación, volverían a aparecer los mismos comportamientos.

Para Brousseau, en cambio, un momento fundamental de la investigación en Didáctica lo constituye el análisis a priori de la situación. El investigador en Didáctica debe ser capaz de prever los efectos de la situación que ha elaborado, antes de ponerla a prueba en el aula; sólo posteriormente podrá contrastar sus previsiones con los comportamientos observados.

Para analizar las situaciones didácticas, Brousseau las modélica, utilizando elementos de la teoría de los juegos y de la teoría de la información. Para una situación didáctica determinada se identifica un estado inicial y el conjunto de los diversos estados posibles, entre los que se encuentra el estado final que corresponde a la solución del problema involucrado en la situación. Se explicitan las reglas que permiten pasar de un estado a otro. La situación es descrita, entonces, en términos de las decisiones que los jugadores (alumnos) pueden tomar en cada momento y de las diferentes estrategias que pueden adoptar para llegar al estado final.

Otro aspecto que facilita el análisis de las situaciones didácticas es su clasificación. Brousseau distingue, entre las situaciones que él produce para su estudio experimental, cuatro tipos, cuya secuencia, en los procesos didácticos que organiza, es la siguiente:

1. Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
2. Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.
3. Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.
4. Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Brousseau plantea que es preciso diseñar situaciones didácticas que hagan funcionar el saber, a partir de los saberes definidos culturalmente en los programas escolares. Este planteamiento se apoya en la tesis de que el sujeto que aprende necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo (Piaget, 1975) similar al que realizaron los productores originales de los conocimientos que se quiere enseñar. Se trata, entonces, de producir una génesis artificial de los conocimientos, de que los alumnos aprendan haciendo funcionar el saber o, más bien, de que el saber aparezca, para el alumno, como un medio de seleccionar, anticipar, ejecutar y controlar las estrategias que aplica a la resolución del problema planteado por la situación didáctica.

Una parte importante del análisis de una situación didáctica lo constituye la identificación de las variables didácticas y el estudio, tanto teórico como experimental, de sus efectos. Lo que interesa son los intervalos de valores de estas variables que resultan determinantes para la aparición del conocimiento que la situación

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

didáctica pretende enseñar. Se trata de precisar las condiciones de las que depende que sea ése el conocimiento que interviene y no otro. Entre las variables que intervienen en una situación hay algunas, denominadas variables de comando, que pueden ser manipuladas por el maestro para hacer evolucionar los comportamientos de los alumnos"[11].

Esta teoría sin duda busca que el alumno construya su conocimiento y que pueda contextualizar las matemáticas, además de que contempla la creación de problemas generadores –*en las situaciones de acción*- para atraer la atención del alumno, sin embargo son tantos los factores que se deben de considerar que los docentes optan por manejar técnicas viejas y caen en la enseñanza tradicional, reduciendo el valor que pueden tener las matemáticas.

Por todo lo mencionado se puede pensar que crear una situación problema y establecer ambientes que propicien un tema, el conocimiento que haga el alumno será más representativo para él y los resultados podrán verse en las evaluaciones.

IV. Experimentación

Durante las dos semanas de prácticas –*que realice en compañía de mi compañera de especialidad Yuliana*- lo que paso fue que se intentó realizar una práctica docente basada en el modelo constructivista de Brousseau, sin embargo el trabajo que se planifico no pudo llevarse a cabo. En los grupos de segundo, se debió a la apatía que sentían hacia una servidora y a lo acostumbrados que están a la forma de trabajo de su maestra titular. Por otra parte, con primer año, los alumnos tomaban las didácticas más como juego y cuando se les proponía jugar lo confundían con no hacer nada durante la clase.

Por todo lo anterior durante las dos semanas se buscaron diversas dinámicas para lograr una enseñanza con los alumnos, por los intentos realizados se observó que en segundos funcionaba dictar, explicar, dejar trabajo y tarea. Y en primeros se lograba un control si se les prometía salir a trabajar al patio. Debido a esto se creía que en primeros se lograba una mejor enseñanza, –*o que uno se explicaba mejor*- sin embargo se utilizar cuando la necesiten. Por ello, estoy, en lo personal, convencida de que la teoría de comprobó en la evaluación –*examen final*- que en segundos se comprendió mejor los temas dados, ya que sus calificaciones fueron mucho mejores y más que nada porque durante el examen no preguntaban todo lo que venía en él –*lo cual hicieron los estudiantes de primero*-.

V. Resultados y propuestas

Sin duda la teoría de Brousseau, aplicada como se debe, puede lograr los aprendizajes esperados. Sin embargo en la práctica realizada, el realizar situaciones didácticas, y buscar que los alumnos construyan su propio conocimiento, no funcionó.
Los trabajos que realizaron los alumnos, fueron vaciados en listas que se entregaron a la profesora titular, (ver anexo 1) sin duda, los resultados que se obtuvieron en dichas listas, no fueron los esperados.

Esto se puede deber a muchos factores como lo son: la apatía, la influencia de otros modelos, la inexperiencia que se tenía, entre otros.
En el proceso de enseñanza influyen bastantes elementos que hacen posible un verdadero aprendizaje, y es imposible que los docentes logren controlar todos –*más por las nuevas leyes que limitan a los profesores*-. El planificar es necesario para todos los profesores, ya que sirve de base para ver qué tema o explicación continua, sin embargo esta no se debe de seguir tan linealmente, ya que si se continua tal cual esta, muchos alumnos se perderían de las explicaciones y no completarían sus conocimientos.

A pesar de todo lo mencionado, aún queda la incertidumbre de preguntarse, ¿por qué no funciono?, ¿Qué hice mal?, ¿Cómo lo puedo arreglar?, entre muchas interrogantes más. Pero hay que recordar que uno no es perfecto y el ser docente no te hace superior a nadie, al fin de cuentas… "El educador no es un ser invulnerable. Es tan gente, tan sentimiento y emoción como el educando."[12] y aprende mejor de los errores como todos los humanos.

Ser docente es un trabajo arduo, que involucra muchos elementos, y enseñar matemáticas no es un trabajo fácil por la fama que se les ha dado. No obstante la asignatura es tan fascinante que el mayor sueño que debe tener un profesor es lograr que sus estudiantes la comprendan y la puedan situaciones didácticas se debe implementar en todos los niveles educativos, para que realmente

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

los alumnos adquieran un pensamiento abstracto que les servirá en todo lo que realicen, con lo que México podrá salir adelante, porque tendrá una población que verdaderamente analiza todo lo que hace objetivamente.

REFERENCIAS

[1] Pérez Leyes, Gustavo; Román Martiniano y López Diez, Eloísa (2003). Los paradigmas educativos y su influencia en el aprendizaje. *Aprendizaje y Currículum*, 29 a 42

[2]Kuhn, T. S. (1962). *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. México: Fondo de Cultura.

[3] [4] L. Luchetti Elena y G. Berlanda Omar (1998). *El Diagnóstico en el aula. Conceptos, Procedimientos, Actitudes y dimensiones complementarias*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

[5] [6] Abarca Fernández Ramón R. (2007). Modelos Pedagógicos Educativos de excelencia e instrumentales y construcción dialógica. *Universidad Católica de Santa María*, 1-118

[7] [8] Cuadra Martínez David (2009).Teorías subjetivas en docentes de una escuela de bajo rendimiento, sobre la enseñanza y el aprendizaje del alumno. *Revista mexicana de investigación educativa*, 14, 1-26

[9] SEP. (2011). Programa de estudios 2011. Matemáticas. Educación Básica. Secundaria, México: Autor.

[10]Ausubel David P., Novak, Joseph D. y Hanescan, Helen (1995). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, México: Editorial Trillas.

[11] Gálvez Grecia (1997). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires: Editorial Paidós Educador.

[12] Freire Paulo (2004). *Cartas a quien pretende enseñar*; Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

El trabajo áulico con la tipología de Brousseau para la reafirmación del concepto *X(0)=0*

Francisco Guillermo Herrera Armendia[*], Marcos Fajardo Rendón[*], Raciel Trejo Reséndiz1[*], Isaac Villavicencio Gómez[*],
[*]Departamento de Matemáticas. Escuela Normal Superior de México. Cuerpo Académico "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Foración Docente y la Educación Básica". Av. Manuel Salazar No. 201. Colonia Ex Hacienda El Rosario. Ciudad de México.
harmendia@gmail.com

***Resumen*- El plan de estudios 1999 de la licenciatura en educación matemática con especialidad en matemáticas dirigido a profesores en formación inicial contempla la asignatura de pensamiento algebraico en 3er semestre, en donde muchos estudiantes cuya formación en nivel medio superior es variada intentan justificar la nulidad del producto de cualquier numero por cero utilizando únicamente el axioma distributivo de la adición cuando que este no es suficiente, pues debe recurrirse a la regla de la aritmética modular citado por Julio Rey Pastor. La presente contribución describe la aplicación de la tipología de las ecuaciones didácticas de Guy Brousseau en la reafirmación de la justificación suficiente y necesaria que demuestra *x(0)=0* Estas fases descritas por Brousseau incluyen la acción, formulación, validación e institucionalización.**

***Palabras Clave*- Tipología de Guy Brousseau, conceptos matemáticos.**

***Abstract*- The 1999´s year curriculum of the bachelor degree in Basic Education with a major in mathematics for teachers in initial training includes the subject of Algebraic Thinking in 3rd semester. Students have concluded high school level and his experience is varied in order to attempt and to justify the annulment product of any number by zero using only the distributive axiom of addition. This is not enough, they must think in the rule of modular arithmetic quoted by Julio Rey Pastor too. This contribution describes the application of the typology of teaching by Guy Brousseau. Mathematical equations are necessary to reaffirm students' knowledge with sufficient and necessary conditions to understand the justification of the proof: *x (0) = 0* These phases described by Brousseau include action, formulation, validation and institutionalization.**

***Keywords*- Guy Brousseau states, mathematical concepts.**

I. Introducción

Los retos que debe enfrentar el futuro docente de educación básica no son fáciles y aun mas con las recomendaciones que sugieren tanto Banco Mundial como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, que tanto insisten en la idea de una educación de calidad. Es por ello que los estudiantes que ingresan a la Escuela Normal Superior de México para cursar la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas (LIESM) enfrentan retos muy complicados durante su formación inicial (uno de ellos es el hecho de que el Plan de Estudios 1999 no contempla los rasgos de perfil de ingreso), lo que supone que ellos tienen la aptitud y actitud para el estudio de las matemáticas, el autoaprendizaje, la reflexión, el hábito por la lectura, entre otras características y que no se observan del todo durante su estancia como docentes en formación inicial. Sin embargo, el Plan de estudios posee cinco grandes rasgos de perfil de egreso, mismos que deben ser desarrollados a lo largo de los cuatro años de estudio: Manteca, 2000) 1) Habilidades intelectuales específicas. 2) Dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria. 3) Competencias Didácticas. 4) Identidad Profesional y Ética. 5) Capacidad de percepción y respuesta a las condiciones del entorno de la escuela, (Plan de Estudios 1999). De ellos, el segundo hace referencia al dominio de contenidos disciplinares al manejarlos con seguridad y fluidez, tanto los contenidos incluidos en el Plan de estudios 2011 para ecuación secundaria como aquellos que se estudian durante su carrera profesional que incluye asignaturas de acercamiento a la práctica escolar, de formación psicopedagógica y además, las propias del estudio de las matemáticas superiores agrupadas en contenidos de aritmética, geometría, álgebra, probabilidad y estadística. Es así que durante el tercer semestre se cursa la asignatura Sentido Numérico (Manteca, 2002) cuyo propósito es el abordaje temas relacionados con la teoría de números, con un enfoque centrado en planteamiento y resolución de problemas, sin descuidar los algoritmos de las operaciones con distintos sistemas de numeración. Los propósitos establecen que los estudiantes:

1. Adquieran bases sólidas en relación con el estudio de los números y sus relaciones, tanto para abordar los siguientes cursos de la especialidad como para realizar un trabajo docente de calidad.
2. Adquieran elementos para analizar situaciones de estudio relacionadas con el significado de los números, sus relaciones y operaciones, que resulten adecuadas para los estudiantes de secundaria.
3. Desarrollen habilidades para resolver problemas en diferentes contextos, con base en el conocimiento de los números y sus relaciones.

El presente informe se centra en el estudio del Bloque 2, correspondiente a los Números Enteros y de éste, retomamos el caso particular del estudio del número cero y su relación con otros elementos del conjunto Z con base en la aplicación de las propiedades de las operaciones de los números reales. Estos resultados son producto del trabajo en el aula con el apoyo de la metodología específica propuesta por Guy Brousseau, concretamente, la tipología didáctica [1]

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

II. La tipología Didáctica de G. Brousseau

A finales de los años 60 surgen en Francia los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM), los cuales se dedicaron en un principio a complementar la formación matemática de los maestros, los programas, y preparando maestros en las escuelas normales. También se dedicaron a producir materiales de apoyo para el trabajo en el aula (textos, fichas, juegos, problemas, juguetes etc.) y con ellos una "experimentación rudimentaria, concebida como prueba de su factibilidad y como antecedente para introducir ajustes mínimos, antes de proceder a su difusión dentro del sistema educativo"[2].

Con el paso del tiempo, los IREM desarrollaron actividades no orientadas a la producción de medios, sino a la investigación científica orientada a construir y controlar las acciones de la enseñanza. Guy Brousseau, profesor e investigador del IREM de Burdeos, propuso estudiar las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos, con la finalidad de reproducir y optimizar los procesos de adquisición de los mismos. A partir de este punto surge lo que después se conocería como la Teoría de las Situaciones Didácticas, cuyo principal exponente es Brousseau. La idea de estudiar las condiciones tiene referencias en el constructivismo propuesto por Piaget. Mabel [3] menciona (en una cita que hace de Brousseau) que "el alumno aprende adaptándose a un medio" (p.3) porque en él encuentra dificultades, desequilibrios, a los cuales el alumno debe responder. El estudio de las condiciones se debe hacer mediante el diseño de situaciones didácticas que son "un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución" [2].

Las situaciones didácticas presentan como elemento central al medio, que son situaciones presentadas por el profesor con una intencionalidad: el aprendizaje de un conocimiento determinado. Para ello es necesario diseñar una situación que genere cierto tipo de interacciones y retroacciones. Las interacciones suceden de dos tipos, entre el alumno y el medio, y entre el alumno y el docente, a las primeras se les denominan a-didácticas en las cuales el alumno trabaja, mientras que el profesor monitorea, es donde suceden las situaciones de acción, formulación y validación. A las segundas se les llama didácticas y se refiere a los intercambios entre ambos, y se presenta en las situaciones de institucionalización y en el proceso de devolución. Las retroacciones en cambio se refieren a los intercambios entre el medio y el alumno, es decir, el alumno tratará de resolver la situación, la cual está diseñada para que no se solucione con estrategias convencionales, por lo que el alumno volverá a intentarlo.

Las interacciones de tipo a-didáctica ocurren a través del proceso de devolución, que se refiere a que el alumno adquiera la responsabilidad matemática para resolver la situación planteada. Este proceso se encuentra regulado por el contrato didáctico, es decir, por reglas implícitas y explicitas entre los alumnos y el docente que determinan qué papel juega cada uno, así como los instrumentos que se pueden utilizar para resolver el problema.

Las situaciones didácticas se clasifican en tres tipos según Panizza; acción, son en las que la interacción es entre el alumno y un medio físico o simbólico, es una toma de decisión de los conocimientos que pondrá en juego; formulación, en donde el emisor debe comunicar cierta información al receptor, de tal manera que el lenguaje sea preciso y adecuado para lo que debe comunicar; validación, en la cual el alumno debe establecer la validez de una afirmación, para "convencer" con argumentos a otro sujeto que acepte o rehúse dichas afirmaciones, pudiendo dar afirmaciones opuestas o pidiendo pruebas de ello.

Cada una de las situaciones descritas tiene una situación fundamental, es decir, una situación que derive en otras "a través de la asignación de diversos rangos de variación o valores particulares a las variables que la caracterizan" " [2]. Un rasgo característico es que son evolutivas, como lo es la adquisición de un conocimiento; buscan que el alumno realice una evocación de los conocimientos ya adquiridos para ponerlos en juego, y pueden ser de dos tipos, de acción (que ocurren al día siguiente de realizarla) habiendo una descontextualización del problema, y la evocación de tiempo prolongado (cuando ya ha transcurrido un lapso amplio) que buscan interiorizar un nuevo conocimiento estableciendo relaciones entre lo viejo y lo nuevo.

Por otro lado, la institucionalización, es la consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje por parte del maestro, es decir, los alumnos comprenden el objeto con el que se trabajó, mientras que el maestro percibe el aprendizaje de los alumnos.

Para que el alumno articule la situación a-didáctica con la institucionalización2 es necesario que tenga un proyecto de aprendizaje, según Patricia Sadovsky, porque intervendrá y condicionará la producción del aprendizaje sobre el objeto matemático que se esté tratando, al responder los cuestionamientos "¿Qué quieren que aprenda con esto? ¿Qué tiene que ver esto con los problemas que hicimos antes?" [3].

Una parte importante de la Teoría de las Situaciones Didácticas es el concepto de obstáculo, el cual se define como "un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades" [4]. Se clasifican en ontogénico, didáctico y epistemológico. El primero se refiere a las limitaciones del sujeto a un momento de su desarrollo; el segundo se refiere a la noción del alumno sobre cierto conocimiento aprendido en el sistema educativo; y el tercero se refiere al rol constitutivo del conocimiento, es decir, de su génesis [5].

III. El trabajo áulico.

Para abordar el tema, aplicamos la situación de acción con el propósito de recuperar los conocimientos implícitos que los estudiantes ya poseen. Presentamos ante ellos, una ecuación de segundo grado, y otra de primer grado, como estas:

$$x^2+x-1=0 \quad (1)$$
$$3x + 2 = 0 \quad (2)$$

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Debemos enfatizar que en esta situación, el docente debe proponer una serie de cuestionamientos que lleven al alumno a proponer las respuestas justas que la situación requiere, en este caso las preguntas se orientaron a la aplicación de las propiedades de las operaciones de los números reales R y su relación en estos dos casos, con la permanencia del número cero en las expresiones equivalentes que se iban obteniendo. Conforme avanza el tiempo, necesariamente se llega a la pregunta: ¿Por qué todo número multiplicado por cero, el producto es siempre cero? [6].

Es aquí cuando se aplica la situación de formulación. Como ya se describió anteriormente, en ésta los estudiantes actúan por sí mismos, al intercambiar mensajes relacionados con el cuestionamiento citado. El docente no debe intervenir sino solo para moderar la discusión entre ello, evitar que cambien drásticamente la orientación de la discusión, monitorear la actividad, y en todo caso, guiar u orientar toda la gama de códigos matemáticos que en este proceso de comunicación activa se genere.

El concepto relacionado con la multiplicación de todo número por cero, es evidente que lo conocen, pero muchas veces lo manifiestan como un acto de fe, pues en la mayoría de los casos no justifican sus argumentos con algún proceso matemático [7].

Justo en esta parte, hemos abordado la aplicación de la situación de validación, al proponerle al estudiante que argumente aseveraciones. Para ello, ofrecemos reflexionar sobre las ideas propuestas por Kaplan [5] que permiten que los estudiantes emitan juicios con argumentos que ya poseen. Para el caso de expresiones matemáticas que siguen pautas como, por ejemplo, $x.y=0$, entonces se puede argumentar que al menos una de las incógnitas debe valer cero. Kaplan propone, para evidenciar la situación, el conocido modelo de la balanza. Esto permite mostrar, esquemáticamente al grupo la aplicación de propiedades de las operaciones para que éste pueda emitir juicios, y aunque inclusive siguen surgiendo cuestionamientos intercalados entre sus argumentos (cosa que es totalmente válida), normalmente los cuestionamientos surgen cuando la actividad matemática nos lleva directamente a la aplicación de la propiedad distributiva. Se llega a una conclusión parcial: $x \cdot 0=0$ se puede reescribir como:

$x \cdot (n-n)$; puesto que es evidente que $n-n=0$ [8].

Si reescribimos la idea completa, con base en la propiedad distributiva tenemos:

$$x \cdot 0=x \cdot (n-n)=x \cdot n-x \cdot n \quad (3)$$

Finalmente, la situación de validación permite consolidar el trabajo áulico, con relación a los propósitos establecidos, al reescribir, el enunciado de este modo:

$$x \cdot 0=x \cdot (n-n)=x \cdot n-x \cdot n=0 \quad (4)$$

IV. Conclusiones

En un primer momento, tanto la propuesta original $(x \cdot 0=0)$, como el procedimiento que lleva a la aplicación de la propiedad distributiva pareciesen muy comunes tanto entre los estudiantes y los docentes, sobre todo a nivel superior, pero más allá de ello debemos apuntar que lo realmente enriquecedor es el llevar a los estudiantes a la reflexión intensa, a la participación activa (sobre todo entre ellos mismos), a la propuesta de argumentos sólidos que si bien ya conocían, no los valoraban, pues la mayoría de ellos conoce muy bien las propiedades de las operaciones, sin embargo, sólo las ha aprendido en un sentido memorístico, sin vínculo alguno con el discurso matemático que es enriquecedor. Por lado, la metodología propuesta por Guy Brousseau es una muy buena opción didáctica, puesto que al seguirla, hemos observado que permite dar esa libertad de expresión tan buscada en las sesiones de matemáticas, además de centrar al docente en una posición muy variada, pues además de proponer cuestionamientos, toma el papel de monitor, de guía, de observador, de moderador, de receptor de argumentos que deberá moldear, además que finalmente no descuidará su labor de promover las normas institucionalizadas que, como lenguaje, las matemáticas poseen. Se logra un valor extra a estos resultados, pues nuestros estudiantes atenderán como docentes, a corto plazo, a jóvenes que cursan estudios de matemáticas en secundaria e inclusive en el nivel medio superior. El haber vivido una propuesta didáctica como esta, les abre opciones sobre metodología didáctica, que si bien, no es la única, pues existen variedad de investigadores en educación matemática, observaron que se alcanzan los propósitos que los estándares actuales solicitan.

V. Referencias

[1] Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathemtacis. Kluwer. New York.

[2] Chevallard,Y., Bosch, M.& Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El Eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: I.C.E. Horsori

[3] Gálvez, G. (1985): La Didáctica de las Matemáticas, en Parra y Saiz (comp.) Didáctica de Matemáticas, Aportes y reflexiones. Bs. As. Paidós.

[4] Kaplan, R. (2004). Una Historia Natural del Cero. La nada que existe. Editorial Océano. México.

[5] Manteca, E. (2000). Coordinador Editorial. Plan de estudios 1999. Licenciatura en Educación Secundaria. Secretaría de Educación Pública. México.

[6] Manteca, E. (2002). Coordinador Editorial. Los números y sus relaciones. Programa de Estudio. Secretaría de Educación Pública. México.

[7] Panizza, M. (2004). Conceptos Básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en: Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.: Análisis y Propuestas. Paidos, pp.59- 71.

[8] Sadovsky, P. (2005): La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la ensañanza de la matemática, en Reflexiónes teóricas para la educación matemática, Buenos Aires, Libros Del Zorzal.

CAPÍTULO 4

"LAS TIC EN LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS"

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Escenarios Didácticos Virtuales para el Aprendizaje de Matemáticas

Domingo Márquez Ortega #, Juan Carlos Axotla García *; y Miguel de Nazareth Pineda Becerril ^.
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM, Km 2.5 carretera Cuautitlán-Teoloyucan San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcallí, Estado de México. C.P. 54714. México.
* Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM, Km 2.5 carretera Cuautitlán-Teoloyucan San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcallí, Estado de México. C.P. 54714. México.
^ Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM, Km 2.5 carretera Cuautitlán-Teoloyucan San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcallí, Estado de México. C.P. 54714. México.
marquez_od@yahoo.com.mx, c_axotla@unam.com.mx, mnazarethp@gmail.com

***Resumen*- En el presente trabajo se ilustran algunas figuras geométricas, en un estudio teórico-práctico de Geometría Analítica, con el fin de crear escenarios didácticos de aplicación, como alternativa pedagógica para mejorar la enseñanza de las matemáticas, incorporando interfaces de usuario gráficas lo más natural e intuitivas posibles. La representación de objetos es un medio excelente para desarrollar habilidades básicas de pensamiento analítico, teniendo ambientes amigables y atractivos para el estudiante. Explorando alternativas en la búsqueda de construcciones y comprender las operaciones de translación y rotación en los problemas planteados. Estableciendo así el manejo de información espacial, con el software Geogebra, efectuando simulaciones espaciales, cálculos, etc., con el fin de establecer interrelaciones de correspondencia, permitiendo la posibilidad de llegar a una estructura de conocimiento representativa, establecer un vínculo referente para el estudiante. Para cortar la brecha entre lo teórico y pasar a la modelación gráfica que genere un aprendizaje significativo.**

***Palabras Clave*- aprendizaje significativo, escenarios didácticos, modelación gráfica, translación-rotación.**

***Abstract*- In this paper some geometric figures illustrate, in a theoretical and practical study of analytic geometry, in order to create learning application scenarios, as an educational alternative to improve the teaching of mathematics, incorporating interfaces as natural graphical user e intuitive possible.The representation of objects is an excellent way to develop basic analytical thinking skills, having friendly and attractive environment for the student. Exploring alternatives in the search for buildings and understand the operations of translation and rotation on the problems. Thus establishing the spatial information management, with the Geogebra software, making space simulations, calculations, etc., in order to establish relationships of correspondence, allowing the possibility of reaching a representative structure of knowledge, establish a link relating to the student . To cut the gap between the theoretical and move to the graphical modeling to generate meaningful learning.**

***Keywords*- meaningful learning, teaching scenarios, graphical modeling, translation-rotation.**

I. Introducción

Para determinar una traslación en un objeto se aplica para cambiar su posición a lo largo de la trayectoria t una línea recta de una dirección de coordenadas a otra. Convertimos un punto bidimensional al agregar las distancias de traslación, tx y ty a la posición de coordenadas original (x, y) para mover el punto a una nueva posición (x', y').

$$x' = x + t_x \quad , \; y' = y + t_y \tag{1.1}$$

El par de distancia de traslación (t_x, t_y) se llama vector de traslación o vector de cambio. Podemos expresar las ecuaciones de traslación Ec. 1.1 como una sola ecuación matricial al utilizar vectores de columna para representar las posiciones de coordenadas y el vector de traslación:

$$P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Esto nos permite expresar las dos ecuaciones de traslación bidimensional en la forma de matriz:

$$P' = P + T \tag{1.3}$$

Se aplica una rotación bidimensional en un objeto al cambiar su posición a lo largo de la trayectoria de una circunferencia en el plano de xy. Para generar una rotación, especificamos un ángulo de rotación θ y la posición (x_r, y_r) del punto de rotación (o punto pivote) en torno al cual se gira el objeto. Los valores positivos para el ángulo de rotación definen rotaciones en sentido opuesto a las manecillas del reloj alrededor del punto pivote, y los valores negativos giran los objetos en la dirección del reloj. También es posible describir esta transformación como una rotación sobre el eje de rotación que es perpendicular al plano *xy* y pasa a través del punto pivote.

Primero determinamos las ecuaciones de transformación para la rotación de la posición de un punto *P* cuando el punto pivote está en el origen de las coordenadas. Las relaciones angulares y de coordenadas de la posiciones de puntos originales y transformadas se muestran en la Fig. 1. Al utilizar identidades trigonométricas estándar, podemos expresar las coordenadas transformadas en términos de los ángulos θ y φ como:

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

$$x' = r\,cos\,(\varphi + \theta)$$
$$= r\,cos\,\varphi\,cos\,\theta - r\,sen\,\varphi\,sen\,\theta y'$$
$$= r\,sen\,(\varphi + \theta)$$
$$= r\cos\varphi\,sen\,\theta +$$
$$r\,sen\,\varphi\,cos\,\theta \quad (1.4)$$

Las coordenadas originales del punto en las coordenadas polares son:

$$x = r\,cos\,\varphi\,,\; y = r\,sen\,\varphi \quad (1.5)$$

Al sustituir expresiones 1.2 en las ecuaciones 1.4, obtenemos las ecuaciones de transformación para girar un punto en la posición (*x*,*y*) a través de un ángulo θ alrededor del origen:

$$x' = x\,cos\,\theta - y\,sen\,\theta \quad (1.6)$$
$$y' = x\,sen\,\theta + ycos\,\theta$$

Con las representaciones del vector de columna 1.2 para las posiciones de coordenadas, podemos expresar las ecuaciones de rotación en forma de matriz:

$$P' = R * P \quad (1.7)$$

Donde la matriz de rotación es:

$$R = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Cuando las posiciones de coordenadas se representan como vectores de renglón en vez de vectores de columna, el producto de la matriz en la ecuación de rotación 1.7 se transpone, de modo que el vector de coordenadas de renglón transformado $[x', y']$ se calcula como:

$$P'^T = (R * P)^T$$
$$= P^T * R^T$$

Donde $P^T = [x, y]$ y se obtiene la transposición R^T de la matriz R con solo cambiar el signo de los términos del seno.

Dada la dificultad de esta asignatura durante los últimos años en el bachillerato y los primeros del nivel superior la necesidad de evaluar las implicaciones del conocimiento así como las habilidades que el estudiante debe desarrollar para la materia de Geometría Analítica. La justificación es comprender el tema de traslación y rotación de las cónicas y alcanzar un rendimiento académico donde se incorporen entre otros aspectos: el mejoramiento de la docencia, y el uso de tecnologías al proceso de la enseñanza-aprendizaje, como complemento de manera gradual con diversos escenarios didácticos, y el uso del software Geogebra, el cual ofrece una interfaz gráfica permite relacionar conceptos permitiendo al alumno analizar y comprender los elementos y hacer uso del lenguaje analítico, las gráficas tienen un desarrollo que sustenta una construcción de conocimiento matemático como indican diversos estudios [1], [2] y [3], que han aportado información sobre el tipo de graficas que se encuentran actualmente en el bachillerato.

Permitiendo mostrar los objetos con sus propiedades (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre) de manera dinámica.

Por todo lo anterior, como bien lo menciona en [4] la gráfica aporta evidencias de las relaciones que se establecen entre las características situación de cambio y variación y la forma de la gráfica que se quiera obtener. El objetivo general del curso es que el estudiante desarrolle habilidades de observación, análisis e interpretación de diversos fenómenos naturales, económicos, sociales a través de modelos algebraicos, gráficos y que sea capaz de utilizar un lenguaje matemático apropiado.

El contenido temático comprende tres unidades que son:
Unidad I. La Recta: Esta unidad se orienta a la medición de la distancia entre dos puntos, el cálculo de la distancia media y las propiedades de paralelismo, perpendicularidad y pendiente de la función lineal que representa una línea recta.
Unidad II. La Circunferencia: Esta unidad se orienta a la representación gráfica y a la relación entre el centro, radio, circunferencia y a su lugar geométrico y la traslación de sus ejes de referencia.
Unidad III. La Parábola: Esta unidad se orienta a la representación gráfica de una función cuadrática en el Plano Cartesiano y la ubicación de puntos notables en ella, tales como vértice y focos; sus elementos tales como lado recto, directriz y sus propiedades como concavidad.

II. DESARROLLO O METODOLOGÍA

La idea fue trabajar con las cónicas y algunas de las transformaciones geométricas fundamentales como la traslación y rotación, para poder observar el comportamiento en la función para que el estudiante se apropiara del conocimiento y le fuera significativo. Es por eso que desde un punto de vista de la teoría del Concepto Figura l, al objeto

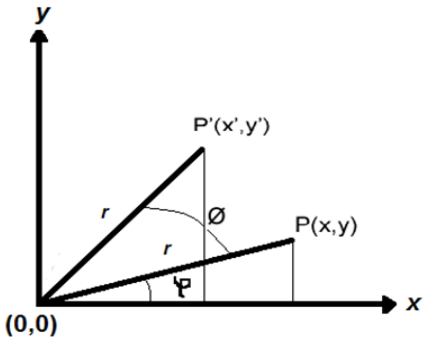


Fig. 1. Rotación de un punto desde la posición *P(x, y)* a la posición *P'(x', y')* a través de un ángulo θ con respecto del origen de las coordenadas. El desplazamiento angular original del punto desde el eje de las *x* es φ.

geométrico se le puede pensar de dos formas: como objetos y como conceptos en [5]. Por medio del software Geogebra, dándose un trato formal a dichas cantidades (magnitud), [6]. Estos supuestos están en conformidad con la idea de Leibniz

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

en [7] de visualizar a las curvas cerradas. Lo cual permitió que el tema de rotación t traslación de ejes de la asignatura de Geometría Analítica se abordara bajo aspectos disciplinarios y tecnológicos así como profesionales para contribuir en el aprendizaje.

Como se puede ilustrar en la Fig. 2. Donde básicamente se trabajó una figura en este caso un pentágono para lograr una visualización.

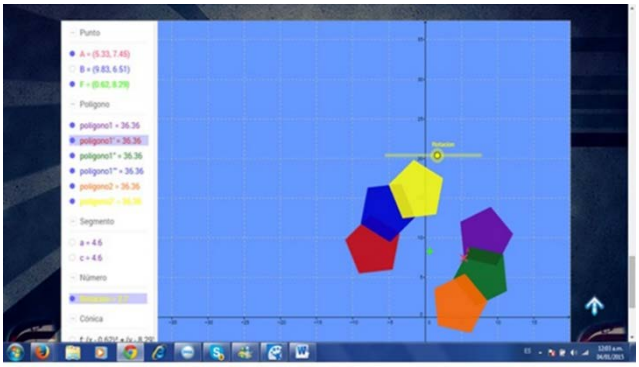


Fig. 2. Forma ilustrativa de la rotación de una figura.

En diversas ocasiones nos enfrentamos a muy diversas problemáticas y sin lograr entender o llegar a la esencia de las cosas, es por eso que con el apoyo de los escenarios didácticos; donde se trabaja la gráfica para la geometría de matemáticas, nos permito realizar presentaciones de forma ilustrativa y dinámica. Se tiene el trazo una figura geométrica en este caso un pentágono colorido y por medio de un deslizador se genera movimiento.
En la Fig. 3 se muestra un escenario didáctico por medio de una animación de trayectorias correspondientes a líneas rectas.

Fig. 3. Escenario didáctico de trayectorias lineales.

En la Fig. 4 por medio del escenario de un cañón se muestra el tiro parabólico logrando la manipulación de la altura, amplitud recrear diferentes trayectorias y preguntar al alumno que sucede si cambiamos el ángulo de inclinación, velocidad, etc.

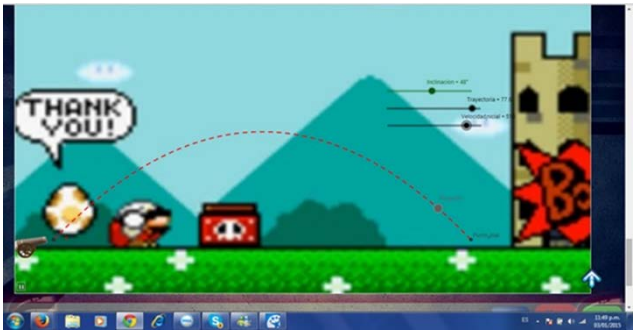
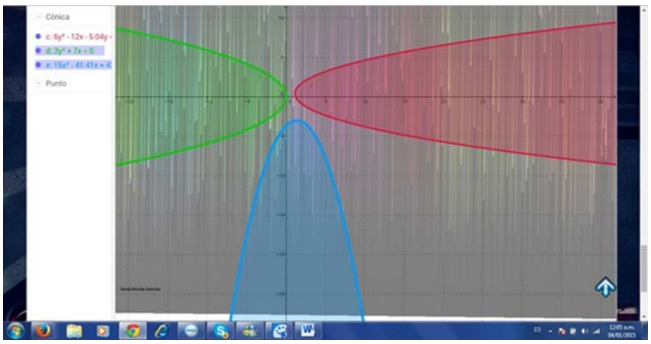


Fig. 4. Trayectoria de un Tiro Parabólico.



Las cónicas, como se ilustra en la Fig. 5 se da una descripción de los datos que la integran, mostrando un colorido al que se hace referencia.

Fig. 5. La Parábola desde diferentes lados

En la Figura 6 se muestra la elipse con la rotación y traslación

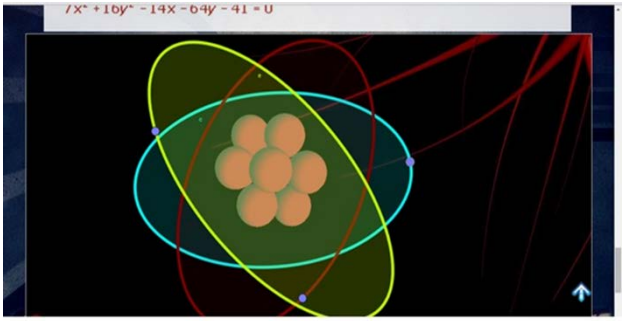


Fig. 6. Escenario Didáctico de la Elipse.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Con el uso de Geogebra se puede ilustrar y obtener animaciones que desarrollen el pensamiento creativo de la forma analítica

La incorporación del software para la creación de ambientes (escenarios) creativos en el desarrollo de los contenidos del programa de Geometría Analítica, en el salón podría generar una reflexión en el estudiante, lo cual propiciaría un aprendizaje significativo.

Esta forma de interactuar trae consigo consecuencias como: cambiar la forma de como el alumno percibe las matemáticas, motivar y promover a una práctica dinámica y sobretodo recreativa de aprender, así como un medio para el desarrollo de habilidades, actitudes y el conocimiento.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Los recursos fundamentales: el software Geogebra como una herramienta para el desarrollo de la práctica docente.

Sistematizar experiencias, identificar buenas prácticas para contribuir en el desarrollo escolar, fomentando estudiantes autodidactas, creativos que puedan comprender de la mejor manera los contenidos del programa con las operaciones de rotación y translación. Con las herramientas tecnológicas construidas bajo las necesidades del ambiente escolar, nos permite una gestión de desarrollo de los contenidos con un grado de entendimiento y además de un trabajo colaborativo que lleve a un análisis y reflexión.

El uso de recursos como el software Geogebra, que permite una nueva actitud y visión de los conocimientos, donde pueden generarse interrogantes, ideas y que exista la apertura para abordar los problemas.

La interfaz gráfica permite crear y utilizar un escenario con múltiples fondos, y objetos con movimientos, ofreciendo a los estudiantes oportunidades para: someter a prueba sus ideas, ensayar, corregir errores y superar sus expectativas. Permitiendo que el estudiante gane la comprensión de conceptos matemáticos como expresiones, variables, coordenadas, entre otras. Pero además, el alumno asocia los conceptos de cantidad, espacio y forma.

IV. CONCLUSIONES

Con el uso de software Geogebra se puede ilustrar y obtener animaciones que desarrollen el pensamiento creativo de la forma analítica. Se obtuvieron algunos indicadores como:

Familiarizarse con los recursos tecnológicos, logrando una habilidad y uso de los mismos. Desarrollar la Innovación y creatividad del estudiante. Asociar y comprender algunos conceptos teóricos al llevarlos a la práctica. Lograr una mejoría continua en la interpretación y sobretodo en la solución a los problemas. La interacción con objetos dinámicos, permite una alternativa didáctica para el aprendizaje. Crear y desarrollar productos como estrategia para el aprendizaje. Incorporar actividades lúdicas interdisciplinarias en el salón de clase. Realizar trabajos de interés para el propio estudiante.

REFERENCIAS

[1] Flores, R. *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto.* Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN (2005)

[2] Cen, C. *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN (2006)

[3] Torres, A. *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología.* Tesis de Maestría no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN (2004)

[4] Suárez T. L. y Cordero O. F. *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar*. Resultados de un estudio Socio *epistemológico.* CFIE, CINVESTAV – IPN (2009)

[5] *Fischbein, E. The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics*, 24, pp.139-162 (1993)

[6] Keisler, J. H. "Elementary Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). *Mathematics Education: A vision of its evolution. Educational Studies in Mathematics.* 53 (3), pp. 255 – 270.calculus: an infinitesimal approach", http://www.infinitesimals.com/, Accedido en Octubre de 2007 (2000)

[7] Kleiner, I. *History of the infinitely small and the infinitely large in calculus*. Educational Studies in Mathematics. 48 (2-3), pp. 137 – 174 (2003)

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

El uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Domínguez Orduña Iris Betsabé[1]
[1.]Escuela Normal Superior de México. Manuel Salazar 201, Azcapotzalco, Hacienda del Rosario, C.P. 02420, Ciudad de México
osiris016@hotmail.com

***Resumen*- Este trabajo tuvo el propósito de identificar las prácticas de los docentes en servicio, explicar las formas de uso de las TIC en la clase de matemáticas, y para entender por qué los docentes en ejercicio no ocupan las TIC y reconocer las prácticas de quienes sí las ocupan. Se mostrará diversas estrategias de maestros frente a grupo que trabajan con este recurso, ¿Qué efectos han tenido en los alumnos? .Entre otros aspectos interesantes que les sirven para trabajar con las TIC.**
***Palabras Clave*- Enseñanza-aprendizaje, Las TIC, Matemáticas.**
***Abstract*- The purpose of this work is to identify the practices of the teachers in service and the use of the ICT in the math class in order to explain why the professors in service don't use the ICT and which ones really use them. Also In this work we are going to demonstrate the diverse teaching strategies that some trainers' teachers use in their service. What effects does ICT have on students? Among other interesting aspects that serve to work with ICT.**
***Keywords*- Teaching and learning processes, ICT, Math.**

I. Introducción

La interactividad alumno–computadora que tiene lugar en algunas aulas de educación básica, y debido al avance tecnológico, los alumnos se han visto en la necesidad de hacer uso de la computadora.

Hoy en día algunos alumnos han podido adquirir una computadora o en su caso una Tablet, lo cual es muy favorable para su aprovechamiento académico, ya que les ayudar para hacer o realizar actividades escolares.

Las TIC permiten adquirir ciertos aprendizajes matemáticos, que puede usar el docente a su favor para hacer una correcta práctica del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se debe buscar cuáles son los intereses de los alumnos, lo que funciona y lo que no funciona, para trabajar lo adquirido en el salón de clases, como los obstáculos que los educandos presentan durante su aprendizaje

Es muy interesante hablar de las TIC, pero se desconoce cómo son llevadas al aula, qué conocimientos tienen los maestros ¿Cuáles son los programas educativos que conocen y utilizan los maestros?, ¿A qué estrategias recurren para poder trabajar los distintos temas a través de este recurso?

II. Metodología

A. Enfoque y métodos

En esta investigación de corte cualitativo, se entrevista a algunos docentes de educación secundaria que trabajan con las TIC, se tomó en cuenta su experiencia con este recurso didáctico, asi como su forma de ponerla en práctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura de matemáticas.

La entrevista consistió en la localización de los docentes en práctica que actualmente tiene experiencia con las TIC, y que las trabajan en sus clases en la asignatura de matemáticas.

Se llevó a cabo de la siguiente manera: Se identificó a docentes de educación secundaria que actualmente trabajan con las TIC en la asignatura de matemáticas, una vez ya ubicando a los docentes, se realizó la entrevista atreves del uso de las Redes Sociales, o por vía telefónica, debido a la distancia en que se encuentran y a la disponibilidad de tiempo de cada uno de ellos.

No se consideran a los docentes que no las trabajan, ya que la investigación se enfoca en los que sí y cómo lo hacen con sus alumnos

A.1 Marco teórico. Las TIC en el Proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas.

Las matemáticas son una de las asignaturas más temidas de los alumnos, se busca encontrar diversas estrategias para poder motivar a los alumnos y puedan presentar mejores resultados en la asignatura, "Los alumnos se sienten más motivados a aprender cuando pueden utilizar tecnología para presentar los resultados de un proyecto o actividad que les ha demandado creatividad" (Khvilon, & Patru, 2004)

Los alumnos de acuerdo al autor se sienten más motivados a aprender, cuando se trabaja con la tecnología, ya que pueden desarrollar su creatividad, y es importante por lo que los docentes pueden usarlo a su favor para obtener mejores resultados por parte de ellos.

Las computadoras ofrecen un medio apropiado para que el alumno explore y trabaje algunos aspectos de esta traducción

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

de códigos pues son capaces de presentar simultáneamente diferentes códigos simbólicos y facilitan también el paso de uno a otro de manera dinámica (Martí, 2005)

De acuerdo a Martí Eduardo la computadora es un medio apropiado para que los educandos exploren y trabajen diversos contenidos y sean capaces de manera autónoma de resolver problemas, de una manera que se les faciliten.

> Las Tecnologías de Información y Comunicación aplicadas a la educación son potentes herramientas que permiten afianzar conceptos, definiciones, algoritmos y procedimientos entre otros, de las diversas áreas del conocimiento, de tal manera que los estudiantes de las nuevas generaciones se acercan a éstas con mayor confianza y seguridad; pues los procesos de aprendizaje a partir de herramientas que son "fácilmente" manipulables, provocan un rompimiento de los temores que tienen los educandos cuando acceden a diversas informaciones, más aún en disciplinas que son consideradas "difíciles" durante la etapa escolar. (González, 2013)

Como anteriormente se menciona se facilita la manipulación de conceptos, definiciones y procedimientos, lo cual ayuda en el ámbito educativo y más en matemáticas, ya que los docentes de matemáticas trabajan con símbolos, ecuaciones, fórmulas, imágenes, demostraciones, etc. Esto les servirá para poder afianzar conocimientos y a su vez romper con los temores que los colegiados presentan, se les brinda una mayor confianza y seguridad, y van formando áreas de conocimiento, sobre los procesos de aprendizaje-enseñanza, en donde verán a las TIC como un recurso para la mejora de su aprendizaje.

> En el caso concreto de las matemáticas, el aprendizaje de esta materia conlleva procesos complejos que requieren de una gran diversidad de metodologías para lograr la máxima eficacia posible. El uso de las TIC se adapta especialmente bien a esta materia: la utilización de imágenes, gráficas, hojas de cálculo, etc. en calculadoras y computadoras bpermite avanzar con suma rapidez y, lo más importante, comprender y retener la información necesaria. Asimismo, las TIC abren la posibilidad de crear nuevos ambientes de aprendizaje y, por tanto, de desarrollar nuevas metodologías que permitan aprovechar al máximo los recursos de los que disponemos. (Elías, 2013)

Como ya se conoce, no solo pueden usar la paquetería de Office, sino ir más allá usando calculadoras, el internet, y software educativo como Geogebra, Cabri, Logo, Derive, por mencionar algunos. Para esto el docente debe tener una capacitación adecuada, hay que conocer un poco de todo para cualquier percance que pueda suscitarse durante la clase, tales como una computadora no encienda, el manejo correcto de la computadora, del Software y del Hardware, y la falta de conocimientos, o la existencia de conocimientos erróneos de los alumnos.

Cuando los docentes trabajan con las TIC en matemáticas, también encuentran obstáculos que los detienen en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

> El alumno puede pedir tipos de ayudas diferentes y modificar algunos parámetros de la situación como el contenido de los problemas […].Estas opciones de actuación permanece en general muy limitadas pues están subordinadas al objetivo curricular del programa (Marti, 2005)

Los alumnos pueden presentar obstáculos de acuerdo a su aprendizaje, se menciona que los colegiados pueden pedir diferentes tipos de ayudas y esto lleva a una situación problemática, lo cual separa del objetivo del programa curricular, el profesor tiene que planear nuevas estrategias para estas situaciones, una de las soluciones encontradas es que los alumnos trabajen en parejas,

> Cada alumno sigue los pasos intermedios que van apareciendo en la pantalla en el proceso de resolución de cualquier problema, lo que permite comunicar sus sorpresas, dudas y propuestas de intervención al compañero que está realizando la misma tarea con la misma computadora. Esta posibilidad puede favorecer el aprendizaje matemático evitando bloqueos y errores matemáticos frecuentes en alumnos que trabajan solos. (Martí, 2005)

Cuando pasa esto los alumnos se van corrigiendo uno al otro, el que está en el computadora ejecuta la tarea, mientras que el otro da sus aportaciones, para poder realizar lo que se les indico y esto lleva a poder evitar errores matemáticos por parte de los alumnos.

B.1. El papel del docente

Es muy importante tener en cuenta algunos aspectos sobre esto, en donde influye la distribución del alumnado, es decir si habrá un alumno o dos por equipo, el siguiente punto seria cómo el profesor dará las instrucciones al inicio de la clase. Aquí los docentes mencionan a los alumnos la página web o programa educativo que se trabajará, asi como las indicaciones para que lleven a cabo la actividad.

Algunos docentes consideran el uso de la TIC, para pasar diapositivas o ver videos, "En clase solemos usar las TIC para hacer presentaciones y/o exposiciones" (El Berdai, Torres, y Lucena, 2015)

Hemos llegado a ver estas situaciones, esto podría provocar un desinterés de los alumnos por aprender, por lo cual los docentes tienen un trabajo difícil, que es despertar el interés de los alumnos, "El uso de las TIC motiva a los estudiantes a fomentar el aprendizaje de las matemáticas de manera autónoma." (Mayoral, & Edison,2014)

Se conoce que las TIC motivan a los alumnos, pero para lograr que aprendan matemáticas esta es otra labor "Las matemáticas pueden ser del interés de los estudiantes, el todo está en la forma como se aborde, es decir, motivar al estudiante, presentarla de forma creativa y evidenciar su aplicación en el contexto."(Mayoral, & Edison, 2014) por lo anterior se entiende que las TIC-Matemáticas se podrán encontrar resultados muy favorables en el aprendizaje de los alumnos.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

B.2. Programas educativos.

Existen varios programas cuya interfaz es gráfica y nos facilita la inserción de objetos con los que trabajar. "Cabri-Geometre, Geogebra, The Geometer´s Skertchpad, Cinderella, Regla y compás, Geup, son algunos ejemplos estos programas son muy recomendables para alumnos de secundaria." (Marcilla de Frutos, 2013) se toma en cuenta para geometría.

Cabri y Geogebra, a pesar de que son programas similares, estos dos tienen diferencias, como se menciona en el siguiente párrafo.

> Entre programas de geometría dinámica como Geogebra y Cabri existen algunas diferencias en el sentido de que depende el tipo de actividad para que sea más adecuado un programa o el otro, por ejemplo para realizar actividades de geometría analítica es mejor Geogebra, pero en actividades de geometría sintética es mejor Cabri. Sin embargo Geogebra tiene una ventaja esencial frente a Cabri y es que es software libre (Molero, 2012)

Geogebra es un Software matemático, que es comúnmente utilizado por los docentes debido a su facilidad y a las funciones que se les permite trabajar, como realizar trazos, mientras pasa lo mismo con Cabri, solo que este no es muy conocido debido de que es un poco ya antiguo.

Mientras para cálculos de operaciones encontramos algunos como, Derive, Proyecto de descartes, Wiris, Buscador de números naturales, Calc 3D Prof, LinCalc, Winmat, los programas anteriores se pueden ocupar para temas de aritmética, algebra, probabilidad y estadística (Winstats, StadiS, Probability explore) o geometría. Por ultimo mencionamos algunos que pueden servir para funciones; Winplot, Funciones para Windows, FunGraph, Matlab, también hay programas para programación lineal como Prolin y logo.

III. LAS TIC EN EL AULA

De acuerdo a la investigación, veremos cuál es la manera en que los docentes trabajan las TIC, se retoman sus comentarios realizados durante las entrevistas, debido a que consideramos importante su opinión, ya que ellos tienen un acercamiento mayor a ellas, asi como a los alumnos, debido a sus años de experiencia, también veremos el motivo que los empujo a hacer el uso de las Tecnologías de la información y comunicación para la enseñanza de las Matemáticas, se toma el marco teórico para sustentar la investigación.

A. ¿Por qué trabajar con las TIC?

En un momento de nuestra vida les ha llamado la atención las TIC, ya sea una computadora, un celular, o la televisión, etc. Sin embargo hay maestros que las ocupan por convicción propia, como es el caso de los entrevistados "Con el objetivo de tener material audio visual para ayudar a repasar temas complicados, en especial geometría el primer tema fue trazo de polígonos regulares y trazo de paralelogramos […]" comento el entrevistado.

Los motivos que los docentes argumentan para ocupar las TIC, aprovechar lo que los alumnos ya conocen, a través de sus intereses, para que se involucren en su aprendizaje con las actividades propuestas. Es algo que les ha favorecido para obtener mejores resultados académicos. Como menciono en el marco teórico, a los alumnos les interesa mucho el uso de las TIC, ya que despierta su interés, asi como su creatividad.

Otro de los motivos es la actualización por parte de los docentes, ya que dejan a un lado las clases tradicionales y buscan otra manera de enseñar, ocupando diversos recursos tecnológicos.

B. ¿Tú como trabajarías con las TIC?

Esta no es una pregunta difícil de contestar y más si no eres creativo, y desconoces programas educativos o la rama extensa de las TIC. Actualmente el programa que más ocupan los maestros para la enseñanza de las matemáticas es Geogebra, Cabri, Malmath, Grafmatica Excel, Word, PowerPoint, asi como la Internet, blog, tutoriales en YouTube, plataformas educativas, y por último correo electrónico. Éste les permite mandar tareas a los docentes, asi como revisarlas una vez que los escolares la resuelven. Lo que es interesante es que los alumnos realizan actividades guiadas por su profesor o que ellos mismos descubren y desarrollan su propio conocimiento.

El software más ocupado por los maestros es Geogebra, por lo general ellos lo ocupan para temas de geometría, en donde pueden presentar algunos ejercicios con un enfoque dinámico o simplemente realizar trazos.

> He incorporado el uso de algunas herramientas tecnológicas a mi práctica docente. De manera regular uso el software Geogebra para el estudio de geometría, esto me permite tener un enfoque dinámico de los objetos geométricos y profundizar en el análisis de sus diferentes representaciones. También he podido usar algunas herramientas para trabajar contenidos como: ecuaciones, probabilidad, representaciones gráficas. [Entrevistado]

En el marco teórico se mencionó que Geogebra es una herramienta fácil de ocupar y se recomienda para secundaria lo cual podría ayudar mucho a los docentes.

> […]Se les presentará a los alumnos por parte del profesor el protocolo de construcción de simetría axial en el programa Geogebra (Programa para manipular modelos aritméticos, algebraicos y geométricos), al concluir la construcción los alumnos pasaran de manera individual a manipular e interactuar con el programa, después los alumnos en parejas resolverán un cuestionario que dará cuenta de lo que observaron así como su gusto y dificultades de la actividad... [Plan de clase del entrevistado]

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Como se menciona anteriormente en el marco teórico, el trabajo en parejas puede evitar errores o bloqueos matemáticos, ya que con la intervención de uno de los compañeros es más fácil realizar la tarea, debido a lo que observa el alumno, esto se menciona en [6]. De acuerdo a la investigación los docentes ocupan Geogebra para temas de geometría, lo cual pueden utilizar otros más para estos contenidos, también se usa la internet como recurso, ya sea para realizar investigaciones, ver videos en YouTube, el uso de correo para enviar o recibir tareas, plataformas educativas que se ocupan para revisar contenidos de la clase o el blog en donde se proponen retos matemáticos para el público en general.

C. Resultados que los docentes ven en sus alumnos cuando trabajan con las TIC.

Los profesores de matemáticas ven en sus alumnos algunos cambios y ellos manifiestan que son favorables, los cuales los han ayudado en distintos hámbitos, tanto académicos así como emocionales. "Descubren algo nuevo su curiosidad los lleva a buscar nuevas aplicaciones a lo que aprendieron y se sienten orgullosos de sus creaciones, aumentan su autoestima, se sienten felices y capaces" (Entrevistado).

Se comprueba que los alumnos se sienten más motivados cuando ocupan las TIC, teoría que se menciona en [4], en donde vemos que los docentes han tenido muy buenos resultados cuando ocupan las TIC. Otro entrevistado menciona que de acuerdo a su observación el ve en los educandos los siguientes resultados; "Los alumnos aprenden de manera independiente, los alumnos muestran disposición al uso de la tecnología, además, la usan de forma eficiente, en algunos casos el uso de la tecnología permite la experimentación, la elaboración de conjeturas y su comprobación" [entrevistado].

Pero en algunos casos no siempre pasa los mismo habrá alumnos que muestren actitudes distintas a como se mencionó anteriormente y que ven la tecnología como una "moda" y no como un recurso educativo, lo cual han separado la relación TIC-Educación. Un entrevistado menciona que ve apatía y falta de compromiso en el trabajo ya que ven a la tecnología como una moda, no como recurso educativo. Los docentes deben ir formando esto e ir orientando a los alumnos a ver la tecnología como una herramienta educativa que les permita ampliar y fortalecer sus conocimientos.

D. Los obstáculos que los alumnos y los maestros presentan a través del uso de las TIC.

Los docentes encontraron diferentes obstáculos que se les presentó durante el uso de la computadoras, ya que en algunas escuelas secundarias no hay suficiente número de computadoras, por lo cual se ven obligados a asignar por máquina dos o más alumnos, y esto en ocasiones puede ser un factor de distractor y cause la indisciplina del grupo. Otros de los factores que se presentan es la versión de la tecnología ya obsoleta, o las computadoras no funcionan en su totalidad, no hay internet o es limitado, hay algunas fallas en los equipos, esto quita tiempo de la clase.

Los obstáculos que los alumnos presentan y consideramos una de las primeras que se deben mencionar es que los muestran un desinterés por las TIC con un enfoque educativo. "Un obstáculo didáctico es la apatía hacia las TIC en el ámbito educativo, los alumnos son esclavos de las redes sociales y por tal motivo es muy difícil sacarlos de su zona de confort". [Entrevistado]

"El alumno puede pedir tipos de ayudas diferentes y modificar algunos parámetros de la situación como el contenido de los problemas"[…] como lo menciona Martí [6].Los alumnos pueden poner obstáculos de diversas formas, las estrategias por parte del docente son muy importantes ya que, los jóvenes de hoy en día, se ven en la necesidad de estar pegados ya sea su celular, computadora, o Tablet, podría ayudar mucho que en estas redes hay perfiles dedicados a las matemáticas, esto puede usar el docente a su favor, aunque debería haber un cambio de paradigmas en los alumnos,.

Mientras tanto en las matemáticas y las TIC, hay otros obstáculos como el uso de la simbología y terminología inadecuadas, es decir, los conceptos que trabajan no son los correctos.

> En cuanto a la indagación de información es inadecuada, ya que hay páginas que no tienen la adecuada, y se guían por esa siendo o no la correcta. "El lenguaje y simbología. Noto que en muchas ocasiones conocen algunos símbolos y saben cómo emplearlos en su libreta, pero no al realizar un trabajo en computadora [Entrevistado]

"Las TIC abren la posibilidad de crear nuevos ambientes de aprendizaje y, por tanto, de desarrollar nuevas metodologías que permitan aprovechar al máximo los recursos de los que disponemos."(Elías, J,2013) .En cuanto los alumnos no buscan la información correcta, en donde se presentan obstáculos de definición del lenguaje matemático y simbología, y esto se resuelve aplicando una metodología implementada por el docente para que el alumno obtenga información verídica.

E. ¿Cómo despertar el interés de los alumnos?

Como se ha estado mencionando anteriormente la tecnología es algo que a los jóvenes les llama mucho la atención, pero la ocupan para otros fines, dejando a un lado lo educativo. Por lo cual los docentes se han visto en tarea para poder integrarlas en sus clases en la asignatura de matemáticas, siendo está una de las más complicadas.

> Despertar el interés de un alumno por las matemáticas es algo muy difícil hoy en día. Ellos están inmersos en otras cosas, mientras que la asignatura no es nada interesante, pero cuando les hago trampa y con algún tema de su interés lo

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

> relaciono con la asignatura es como logro que se fije con mayor facilidad [entrevistado]

Como lo menciona Khvilon, & Patru, los alumnos se sienten más motivados cuando trabajan las TIC con temas de su interés haciendo que la clase no sea aburrida y tengan un mejor rendimiento académico, los docentes no tienen una tarea fácil lo que ellos proponen es lo siguiente:

> […] uso básico de elementos matemáticos en programas matemáticos y exhortó a los alumnos a buscar diseños de estructuras complejas de procedimientos matemáticos que generen estética y animaciones, se posibilita de manera frecuente en el área de geometría, esto genera interés en los alumnos y buscan competir para el mejor diseño [...] [entrevistado]

Anteriormente en el marco teórico se mencionó que se debe explotar las habilidades de los alumnos, estas estrategias les han servido a los maestros frente a grupos en nivel secundaria, otras que son útiles para despertar el interés de los alumnos, debido al uso de las redes sociales y todas estas cuestiones, los maestros se han aprovechado de esta situación es decir para despertar el interés de los jóvenes ellos ocupan la internet ya sea a través de páginas de internet, blog o plataformas educativas, ellos mencionan lo siguiente.

> La primera impresión es primordial en todos los ámbitos de la vida, ante tal situación considero primordial utilizar páginas de internet que capten la atención a primera vista de los alumnos, desde los colores de la página, tipos de letra, etc., cuando uno como docente crea páginas web o material educativo es necesario considerar los aspectos mencionados con anterioridad, una vez que se capta la atención del alumno se van involucrando en el contenido de las páginas e incitan a comparar la información con otras fuentes; creando así su propia concepción sobre algún tema.[Entrevistado]

El trabajo con las TIC, en ocasiones los profesores lo trabajan de manera colaborativa dependiendo los espacios y equipos que estén disponibles en las diversas instalaciones, lo que es interesante es que a los alumnos se les ponen retos para que puedan ir ellos descubriendo diversas cosas, y puedan tener un aprendizaje

IV. CONCLUSIONES

El trabajo del docente no es fácil y menos despertar el interés de los alumnos, en ocasiones muestran una apatía ante las diversas actividades, en donde los profesores se ven obligados a ocupar diversas estrategias y una de ellas son las TIC. Los profesores entrevistados han tenido resultados muy favorables que benefician su labor debido a que no solo transmiten conocimientos a los educandos, si no también sirve para evaluar su práctica.

También podemos ver que el Software que actualmente ocupan más es Geogebra, asi como el internet en sus distintos ámbitos, el primero lo ocupan para temas de geometría, mientras que el segundo lo ocupan para la revisión de distintos temas de matemáticas.

Se han dedicado a crear Blogs, canales en YouTube y plataformas educativas, a investigar páginas en el internet, y todo esto con el fin de ayudar a que los alumnos tengan un mejor desempeño académico.

Los alumnos son esclavos de las redes sociales y por lo tanto hay que buscar algunas medidas para que las TIC, se integran en las clases de matemáticas.

Por ultimo hay que analizar los diferentes estilos de aprendizaje de nuestros alumnos, asi como ver que son seres humanos creativos, que ellos pueden crear diseños. El interés del alumno puede ser una herramienta que el docente puede usar para sus clases.

Agradecimientos

Se agradece la colaboración de todos los docentes que me permitieron la realización de este trabajo brindado su tiempo en la contestación de las entrevistas realizadas, asi como a los maestros que me apoyaron en la elaboración de esta ponencia.

REFERENCIAS

[1] El Berdai, M. N., Torres, J. M. T. Y Lucena, M. A. H. (2015). Valoraciones de los alumnos sobre el uso de las tic en el aula en los centros de enseñanza secundaria de la ciudad de tetuán. *European Scientific Journal, Esj*, *11*(34),pp. 147

[2] Elías, J. (2013). Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Cantabria, pp.17 .

[3] González, C. (2013) Cartilla TIC para la enseñanza de las matemáticas, *I CEMACYC*, No.1 pp.1

[4] Khvilon, E., & Patru, M. (2004). Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente. Guía de planificación. *División de Educación Superior, UNESCO. Uruguay: Ediciones Trilce*.

[5] Marcilla de Frutos, C. M. (2013). Las TIC en la didáctica de las matemáticas, Tesis de maestría no publicada, Universidad de Burgos, pp. 32

[6] Marti E.(.2005).*Aprender con Computadoraes en la Escuela* .Posdata, pp.77-147

[7] Mayoral Castro, J., & Edison, S. L. (2014). Estrategias didácticas mediadas con tic para fortalecer aprendizaje autónomo de la matemática en estudiantes de 9° del IDDI Nueva Granada (Doctoral dissertation, Universidad de la Costa CUC),pp. 70

[8] Molero, M. (2008) Los medios tecnológicos y la enseñanza de las Matemáticas, Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura, pp. 125.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Uso de recursos en la resolución de problemas no rutinarios

Clara Mayo Juárez y Ulises Xolocotzin Eligio[1]
[1]CINVESTAV- IPN. Av. Instituto Politécnico Nacional #2508, San Pedro Zacatenco c.p. 07360, México D.F.
cmayo@cinvestav.mx; uxolocotzine@cinvestav.mx

***Resumen*-Este documento describe cómo la tecnología (Geogebra), es vista como un recurso [1], resuelve problemas no rutinarios con contenido geométrico y algebraico, refuerza el razonamiento y las soluciones construidas sobre papel y lápiz. El estudio es de corte cualitativo y para el análisis de datos se apoya desde el enfoque documental de la didáctica [2] [3]. Para llevar a cabo el estudio se diseña un pre-test y actividades (diseñadas en entornos de papel y lápiz y tecnología). La investigación involucró a seis futuros maestros de Matemáticas (entre 22 y 26 años) de educación secundaria. Los resultados del estudio muestran que el uso de Geogebra, presente durante la resolución de problemas, reforzó la construcción de las soluciones de los problemas previamente realizados con papel y lápiz.**

***Palabras clave*- Conocimiento matemático, Futuros profesores, Tecnología, Solución de problemas.**

***Abstract*- This document shows how technology (Geogebra), seen as a resource [1], solve non-routine problems with geometric and algebraic content, reinforces the reasoning and solutions built on paper-and-pencil. The study is qualitative cutting and for the analysis of data is supported from the documentary approach of the didactic [2][3]. To carry to out the study is designed a pre-test and activities (designed in environments of paper- and -pencil and technology). The research involved six future teachers of Mathematics (between 22 and 26 years of age) of secondary education. The results of the study show that the use of Geogebra, present during problem solving, reinforced construction of the solutions of the problems previously made with paper-and-pencil.**

***Keywords*- Mathematical knowledge, future Professor, technology, problem solving.**

I. Introducción

En educación matemática una de las problemáticas que desde hace más de treinta años sigue causando interés es la falta de conocimiento matemático por parte de los futuros profesores para afrontar problemas relacionados con su futura práctica. Especialmente, en lo concerniente a resolución de problemas no rutinarios. De acuerdo con algunos autores un problema no rutinario es cognitivamente no trivial por lo que al leer el enunciado no viene a la mente un procedimiento algorítmico a seguir, por lo que es necesario buscar diferentes métodos para dar solución al problema [4].

Esta problemática ha hecho que distintos investigadores de todo el mundo busquen maneras de mejorar dicho conocimiento. Una de las propuestas planteadas en años recientes por diversos investigadores es la incorporación de la tecnología dentro de la formación de profesores, como un recurso que permita ampliar su razonamiento matemático. El rápido desarrollo de las computadoras ha hecho posible que se puedan realizar en ellas procedimientos sofisticados de algebra, calculo de límites, simplificaciones algebraicas, etc., de forma más rápida que los usados por el profesor durante la enseñanza tradicional, permitiendo, también, exploraciones y análisis reflexivos distintos a los de papel-y-lápiz [5].

Aunque la tecnología ha avanzado mucho, en la actualidad ésta no ha podido reemplazar el uso del papel-y-lápiz, por el contrario, funge como un complemento de éste. La tecnología permite exploraciones dinámicas que lleva a extender los razonamientos efectuados en ambientes estáticos (papel-y-lápiz). Para algunos investigadores la incorporación de la tecnología a las escuelas actualmente no es un obstáculo, pero la dificultad a la que nos enfrentamos ahora es ¿qué queremos enseñar con dicha tecnología? [5]

De acuerdo con algunos estudiosos el enfoque usado para resolver problemas matemáticos con papel-y-lápiz es distinto al tecnológico; por ejemplo, una figura en el ambiente papel-y-lápiz tiene que ser marcada para mostrar sus propiedades (lados, ángulos, etc.). Mientras que en un entorno de geometría dinámica, la técnica de arrastre revela las propiedades de la construcción que pueden permanecer ocultos en la figura [6]. Parece ser entonces, que el uso de la tecnología estimula nuevas formas de abordar los problemas distintos a los de papel y lápiz.

Tomando en cuenta las ideas anteriores, este artículo se centra en mostrar cómo la exploración en Geogebra potencia el razonamiento matemático efectuado con papel-y-lápiz sobre el uso de los recursos matemáticos. El artículo muestra a través de actividades que implican resolución de problemas, cómo la exploración en Geogebra funge como un complemento que refuerza los distintos usos que se le puede dar a los recursos matemáticos para lograr construir la solución del problema en papel-y-lápiz. A partir de esta perspectiva teórica, pretendemos en este artículo responder la siguiente pregunta ¿cómo la exploración en Geogebra permite visualizar nuevos usos en los recursos matemáticos utilizados en papel-y-lápiz y cómo estos refuerzan la solución al problema?

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

II. Marco teórico

Para poder dar respuesta a la pregunta planteada en éste estudio, el artículo se apoya del enfoque teórico: Aproximación Documental de lo Didáctico [2][3]. Este enfoque hace distinción entre dos constructos teóricos: recursos y documentos. El recurso, puede ser físico (e.g., libros de texto, herramientas tecnológicas, etc.) o no físico (conocimiento del profesor, conceptos y teoremas matemáticos, dialogo entre profesor y estudiante, etc.), mientras que un documento es originado a través de un proceso de génesis documental. Durante este proceso, el usuario del recurso construye sus propios esquemas de utilización [7] sobre dicho recurso, estos esquemas son el conocimiento implícito de los sujetos. De esta manera, un documento es originado a partir de un recurso más el esquema de utilización que se tenga sobre dicho recurso. En el proceso de génesis documental existe dos partes importantes, por un lado un conjunto de recursos y por el otro el usuario de éstos, las cuales se encuentran en estrecha relación, por dos procesos dialécticos: instrumentación e instrumentalización. Esta relación entre el recurso y el esquema de utilización del usuario da como producto el llamado documento.

Es a través de este enfoque teórico que se pretende observar cómo la tecnología (Geogebra) permite hacer cambios en el razonamiento de los estudiantes para profesor sobre el uso de los recursos matemáticos [teoremas, conceptos, etc.] cuando resuelven problemas. Desde este punto de vista teórico dichos cambios conllevan a modificar los esquemas de uso de los recursos matemáticos puestos en juego en la resolución del problema y por ende las construcciones de la solución efectuadas en papel-y-lápiz. Debido a que los esquemas de utilización de los recursos son una parte no observable, por estar conformada por la estructura cognitiva del sujeto que guía su acción [7], lo que resta es mirar la parte observable la cual corresponde a las acciones mismas de los sujetos [8]. A partir de este enfoque teórico este estudio muestra, cómo la tecnología influye en el razonamiento de los estudiantes, lo que da origen al descubrimiento de nuevos usos que se le pueden dar a los recursos matemáticos (documentos). El estudio quiere mostrar cómo durante el proceso de resolución de los problemas, la tecnología propicia que los futuros profesores construyan nuevos esquemas de utilización sobre los recursos matemáticos utilizados.

III. Metodología

A)Participantes

Los estudiantes que intervinieron en el estudio de investigación fueron seleccionados sin tomar algún criterio particular de selección. Sólo se procuró que fueran estudiantes para profesor de educación secundaria y que estuvieran cursando los últimos semestres de su formación [quinto, sexto, séptimo u octavo semestre] y que, además, quisieran participar en dicho estudio. En la investigación se trabajo con seis estudiantes [entre 21 y 26 años de edad] que se encontraban cursando el quinto semestre de su formación en la Escuela Normal Superior de México [E.N.S.M.]. Para llevar a cabo el estudio, los participantes fueron distribuidos en tres grupos, cada uno de dos integrantes, con el objetivo de que trabajaran en parejas durante las Actividades implementadas por el investigador.

B) Diseño e implementación de los instrumentos usados en el acopio de datos

Como parte de la metodología fueron diseñados dos instrumentos para el acopio de datos: Pre-test y la Actividad. El objetivo del Pre-test [previo a las Actividad] consiste en detectar los conocimientos matemáticos con los que cuenta los participantes y que son necesarios para su futura práctica. El Pre-test estuvo conformado por preguntas y problemas matemáticos a resolver. El Pre-test fue implementado en los participantes individualmente. La Actividad implementada consistió en resolver, en parejas, un problema con contenido geométrico y algebraico. Primero, se les pidió resolver el problema con papel-y-lápiz apoyándose de una calculadora CASIO fx-82MS para fines prácticos de cálculos; segundo, resolver el mismo problema, pero ahora apoyados de la exploración del problema con Geogebra. Los contenidos matemáticos que conformaron el Pre-test estaban de manera explícita o implícita en la Actividad.

La implementación de la Actividad fue dirigida por el investigador de este artículo con la intensión de conducir a los estudiantes, mediante entrevistas semi-estructuradas, a la reflexión durante la resolución del problema. Se permitió que expusieran dudas en cuanto a la comprensión del problema. Se permitió que de manera libre los estudiantes resolvieran el problema. La participación del investigador estuvo enfocada a la observación y no tanto a entrevistar. La sesión de trabajo para la Actividad tuvo una duración, aproximada, entre una hora y media y dos horas, la cual fue video-grabada.

C) Implementación de la Actividad

En éste artículo son analizados y discutidos los datos de la Actividad, que surgen del trabajo de una pareja de estudiantes. En adelante, los integrantes de ésta pareja serán nombrados E1 y E2 y para referirnos al Investigador, se usará el prefijo IN.

D) Actividad I. Papel-y-lápiz

Al inicio de la Actividad se les pide a los estudiantes que resuelvan el problema 1 [véase Figuras 1, 2 y 3], sólo utilizando papel-y-lápiz. Para fines prácticos de cálculos matemáticos el investigador les proporciona una calculadora [CASIO fx-82MSK].

Problema 1. *Tomado y modificado de:* Mason, J. Burton, L. y Stacey, K., 1989, p. 183.

Ambiente de papel-y-lápiz: el cuadrado y sus triángulos

En el cuadrado de vértices *ABCD* de lado 1 *cm* (como se muestra en la Figura 1), la diagonal *BD* se divide en cuatro partes iguales. ¿Cuál es el área del triángulo *CFD*? Ahora divide la diagonal *BD* en cinco partes iguales y luego en 6 partes iguales, ¿cuál es el área del triángulo *CFD* que se forma con la quinta y sexta parte de la diagonal *BD*?

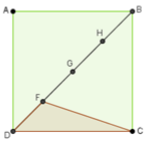


Figura 1. El cuadrado y sus triángulos

Fig. 1. Problema 1, papel-y-lápiz

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

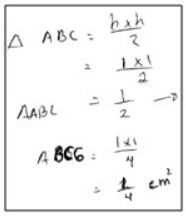


Fig. 2. Teorema de Pitágoras.

Al inicio de la Actividad el investigador-observador pide a los estudiantes que lean el problema con el fin de asegurarse de que entienden el problema y para aclarar sus dudas. He aquí el diálogo de algunos episodios de la entrevista:

Episodio I. Primera construcción de la solución en papel-y-lápiz.

1 E2: Porqué de nada sirve que se prolongue [prolonga el segmento CF con el lápiz] ¿o sí?

2 E1: Es que si prolongamos [remarca la línea que trazo E2]. [se callan] ¡Ah¡ Vamos hacer lo siguiente: Si calculamos el área del triángulo ABC [escribe] es igual a base por altura sobre dos, entonces, la base sería uno, por la altura que sería uno, entre dos [escribe] […]Entonces se supone que éste [señala el triángulo DFC] sería dos sobre cuatro que esto es igual a […] ¿No son cuatro?

3 E2: No, sería igual a un cuarto […] Porque sería 1 por 1.

4 E1: ¡Así! uno por uno, perdón. Un cuarto. Entonces se supone que éste [señala triángulo DFC] es un cuarto del área total, área del cuadrado ABCD […].

En esta parte de la entrevista los estudiantes muestran los razonamientos y las acciones que efectúan para resolver el problema. Ellos resuelven una parte del problema y encuentran como posible solución que el área del triángulo DFC es un cuarto del área total del cuadrado ABCD cuando la diagonal se divide en cuatro partes iguales. Los estudiantes hacen uso del teorema de Pitágoras y de la fórmula para calcular el área de un triángulo cuando se conoce su altura y su base. Para encontrar el área del triángulo DFC se apoyan del área del triángulo ABC y del cuadrado ABCD.

Episodio II. Construcción de una parte de la solución en papel-y-lápiz

5 IN: ¿De qué otra manera se les ocurre resolver el problema?

6 E1: Es que si éste lo vemos así [voltea la hoja y señala el triángulo DFC] es un triángulo escaleno y la altura es exactamente éste lado [señala el segmento CG] y ya tenemos la base que equivale a un cuarto del segmento BD, que sería un cuarto de raíz de dos ¿cuánto es un cuarto de raíz de dos? […] DF es congruente con 0.3535 [quiere dar a entender que DF=0.3535] y ahora la altura es el segmento GC. Porque si lo vemos como un triángulo escaleno [se refiere a DFC] ésta es la altura […] es una perpendicular al vértice [señala punto C] […] Entonces CG sería igual a un medio de raíz de dos […].

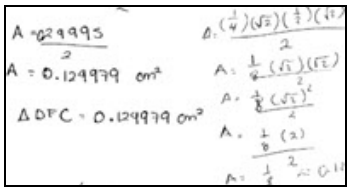


Fig. 3. Área del triángulo DFC.

7 E2: Cero punto setenta, setenta y uno [se refiere a 0.7071].

8 E1: Entonces la fórmula más básica para saber el área de un triángulo es base por altura sobre dos [lo escribe] el área es igual a… Podemos hacerlo de dos formas. Área igual a base por altura sobre dos. Base […] ¿cuánto sería? [E2 opera y escribe A=0.124979].

9 E1: No recuerdo [realiza operaciones algebraicas]. Entonces el área sería ¿un octavo? Y ¿cuánto sería un octavo?

10 E2: Cero punto ciento veinte y cinco, y sí es eso [señala 0.124979].

En este extracto de la entrevista se muestra como el investigador-observador motiva a los estudiantes para profesor a buscar nuevas estrategias de resolver el problema. A raíz de esto los estudiantes efectúan nuevos razonamientos para resolver el problema. Ellos encuentran que el área del triángulo DFC es un cuarto del área total del cuadrado ABCD cuando la diagonal se divide en cuatro partes iguales.

Actividad I. Exploración en Geogebra

Las siguiente parte de la Actividad [véase Figura 4] consiste en resolver el mismo problema que en papel-y-lápiz, pero ahora haciendo uso de la exploración en Geogebra. Para ello se les da a los profesores en pre-servicio el problema en un archivo de Geogebra para que lo exploren únicamente utilizando un deslizador y dos botones.

A continuación, se muestra el diálogo de los estudiantes durante el desarrollo de la Actividad usando Geogebra:

Episodio IT. Primera exploración en Geogebra

11 IN: ¿Es similar lo que encontraron en papel-y-lápiz con lo que observan en Geogebra?

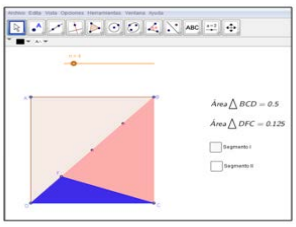


Fig.. 4. Actividad, exploración en Geogebra.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

12 E1: Sí, es básicamente lo mismo, sólo que lo que hicimos con papel-y-lápiz lo basamos todo en torno al cuadrado y ahorita si lo basamos sólo al triángulo sería exactamente lo mismo, el área. Cuando N es dividida en 10 partes, el área del triángulo que se forma es un décimo del área del triángulo mayor [se refiere al triángulo BCD] […].

13 E1: […] N es igual al número de divisiones [lo escribe], el área del triángulo DFC es igual a uno entre N por un medio [lo escribe] […].

En este episodio de la entrevista los estudiantes se dan cuenta de que lo que hicieron en papel-y-lápiz es lo mismo que encontraron con la exploración en Geogebra; sin embargo, descubren que también pudieron resolver el problema basándose sólo en el triángulo BCD. Ésta es un nuevo uso que descubren dar al triángulo BCD para resolver el problema.

Episodio IIT. Validación de ideas externadas en papel-y-lápiz

14 IN: Con el cursor presiona dentro de la pantalla dónde dice segmento uno.

15 E1: ¡Sí! ¡Es lo que había dicho! Que todos los triángulos comparten la misma altura.

16 IN: ¿Cuál sería la altura?

17 E1: El segmento CH, para todo triángulo que se genera sobre ésta línea [señala segmento DB].

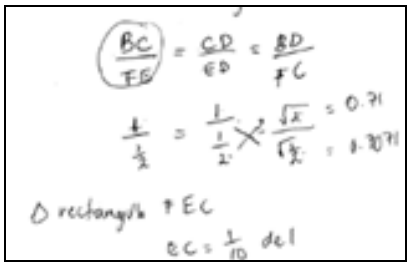


Fig.5. Proporcionalidad entre triángulos.

En este extracto de la entrevista se muestra como los estudiantes reafirman algunas de las ideas que usaron al resolver el problema en papel-y-lápiz y de las que no estaban completamente seguros. La exploración en Geogebra permitió corroborar sus ideas.

Episodio IIIT. Surgimiento de nuevas estrategias de solución

18 IN: Ahora presiona donde dice Segmento II con el cursor.

19 E1: ¡Ah! ¡Ya sé que es esto! se supone que esto está en razón de esto [señala segmentos DG y BE] y esto está […] DC está en razón de EC y FE está en razón de BC y FC está en razón de BD […] ¡sí, ahí está, es el teorema de los catetos! […].

20 IN: ¿Cómo resolverías el problema con lo que dices?

21 E1: A ver no sé si sea así el triángulo rectángulo FEC… [escribe]. No recuerdo.

En esta parte de la entrevista se muestra como los estudiantes intentan idear una nueva solución para el problema, utilizando las proporciones entre los triángulos semejantes. Este cambio ocurre después de visualizar el Segmento II que aparece en la pantalla de Geogebra. Pese a los intentos no logran llegan a una solución.

Episodio IVT. Solución generalizada del problema

22 E2: […] Simplemente, el área del triángulo DCF es igual a DC que siempre va hacer esa siempre la base por la altura, que siempre va hacer DG entre dos, para N número de lados que se divide la diagonal… DG sería igual a, bueno N es igual al número de divisiones. Uno sobre N [escribe].

23 E1: ¡Exacto! Eso sería todo.

En este extracto de entrevista se observa que los estudiantes con ayuda de la exploración en Geogebra logran generalizar la solución al problema para cualquier número "n" de divisiones de la diagonal DB lo que no lograron ver cuando resolvieron el problema con papel-y-lápiz.

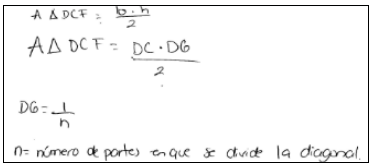


Fig. 6. Solución generalizada

IV. Resultados

Los resultados obtenidos a partir de la Actividad muestran, que inicialmente hubo un reconocimiento del problema por parte de los futuros profesor, pues los estudiantes entendieron lo que se les pedía que resolvieran en el problema. Durante la resolución los estudiantes muestran a través de sus acciones, los razonamientos que efectúan. Comienzan inicialmente ideando estrategias de resolución a partir de lo que saben. El estudiante E1 es el más participativo, mientras que E2 va siguiendo el razonamiento de E2 y en ocasiones interviene para apoyarlo. Durante el proceso de resolución en papel-y-lápiz los estudiantes encuentran soluciones que no les son satisfactorias, lo que causa la búsqueda de nuevas estrategias. A partir de soluciones parciales los estudiantes logran resolver el problema y generalizar la solución.

Cuando el problema es resuelto con el apoyo de Geogebra los resultados muestran que al resultado que obtuvieron con papel-y-lápiz son similares a los encontrados con la exploración en Geogebra. Los resultados muestran que con la exploración en Geogebra los estudiantes pudieron corroborar ideas no tenían claras cuando resolvieron el problemas con papel-y-lápiz, por otra lado se dan cuenta que pudieron haber abordado el problema de otras maneras. Explorar el problema con ayuda de Geogebra permitió visualizar nuevos usos a los recursos y al mismo tiempo

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

razonamientos distintos que los llevó a resolver el problema de distintas maneras.

V. Conclusiones

Con el análisis de datos de la Actividad, damos respuesta parcial a la pregunta de investigación planteada en este estudio ¿cómo la exploración en Geogebra permite visualizar nuevos usos en los recursos matemáticos utilizados en papel-y-lápiz y cómo estos refuerzan la solución al problema? El desarrollo de la Actividad permite apreciar que la exploración en Geogebra sirvió como un complemento para la solución del problema. Es decir, la tecnología sirvió como un recurso mediador de la actividad y del razonamiento. Aunque los estudiantes pudieron encontrar la solución con papel-y-lápiz, la exploración en Geogebra permitió encontrar una solución generalizad así como reafirmas ideas que no estaban bien consolidadas por los estudiantes cuando resolvieron el problema en papel-y-lápiz, por lo que los estudiantes consolidaron sus esquemas de uso sobre los recursos empleados. Los resultados también muestran que la exploración en Geogebra permitió el surgimiento de nuevas ideas para resolver el problema mientras que otras sólo sirvieron para ampliar los razonamientos efectuados por los estudiantes durante la resolución del problema. Desde el punto de vista teórico estos cambios en el razonamiento conllevan a nuevos usas de los recursos y al surgimiento de nuevos documentos que en un futuro se convertirán en recursos de los que echarán mano los futuros profesores para su futura práctica.

Referencias

[1] Gueudet, G. & Trouche, L. (2012). Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. En G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), From Text to 'Lived' Resources Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development (pp. 23-42).

[2] Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? Educational Studies in Mathematics, 71, 199-218.

[3] Gueudet, G. & Trouche, L. (2010). Des resources aux documents travail du professeur et genèses documentaire. En G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques (pp. 57-74). Rennes/Lyon: Presses Universitaires de Rennes-Institut National de Recherche Pédagogique.

[4] Selden, J. Selden, A. & Mason, A. (1994). Even good calculus students can´t solve nonroutine problems. Research Issues in Undergraduete Mathematics Learning. Washington: the mathematical association of america, 33, 19–26.

[5] Trouche, L. & Drijvers, P. (2010) Handheld technology for mathematics education: flashback into the future. Educational Studies in Mathematics, 42, 667-681.

[6] Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. Educational Studies in Mathematics, 66, 317–333.

[7] Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10 (2, 3), 133–170.

[8] Schön, D. A. (1987). Educating the reflective practitioner. San Francisco: Jossey-Bass.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Hacia la construcción conceptual de fracciones equivalentes mediante las TIC

Rafael Córdoba Del Valle[1]
[1]Departamento de Postgrado, Facultad de Pedagogía, Universidad Veracruzana.
Avenida reyes Heroles S/N, Fracc. Costa Verde, C.P. 94294, Boca del Río, Veracruz, México.
Correo electrónico: rcordoba@uv.mx

Resumen- **El objetivo de la presente investigación fue determinar en qué medida el uso de recursos digitales contribuye con la comprensión del concepto de fracción equivalente. El diseño fue de tipo experimental con dos grupos experimentales y dos grupos control. Los resultados de las pruebas T- Student para datos relacionados, realizadas a los grupos control y experimental reflejan que no existe evidencia estadísticamente significativa para postular que existieron cambios en los resultados del Pre Test y el Post Test de los alumnos de los grupos: control de 5° grado, experimental de 5° grado y experimental de 6° grado, sin embargo, se identificó que hay evidencia estadística suficiente para afirmar que se presentaron cambios en los resultados del Pre-test y el Post-test de los alumnos del grupo control de 6° grado, así como en dos indicadores de la comprensión de fracciones equivalentes del grupo experimental de 6º grado.**
Palabras clave- **Enseñanza, fracciones equivalentes, Matemáticas, TIC.**
Abstract **- The objective of this research was to construct the meaning of fraction and improve understanding of equivalent fractions. The design of the research was experimental with two experimental groups and two control groups. The results of the T-Student tests for related data, performed to the control and experimental groups show that there is no statistically significant evidence to postulate that there were changes in the results of the Pre Test and Post Test student groups: control 5th grade, 5th grade experimental and experimental 6th grade, however, it was identified that there is enough statistical evidence to say that changes occurred in the results of the Pre Test and Post Test of students in the control group 6th grade, as well as two indicators of understanding equivalent fractions in 6th grade experimental group.**
Keywords **– Teaching, equivalent fractions, maths, ICT.**

I. INTRODUCCIÓN

Para PISA la competencia matemática es "la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos" [1].

En la evaluación llevada a cabo en el 2012, los mexicanos obtuvieron una media de desempeño de 413 puntos, por debajo de la media de la OCDE que es de 494 puntos. De los 65 países que participaron, 52 países (80%) se encuentran por arriba de la media de desempeño de México, 2 tienen un nivel de desempeño similar (3%) y 10 se encuentran por debajo (15%). Además resulta lamentable observar que en esta prueba sólo el 4% de los estudiantes mexicanos se encuentran en los niveles 4 a 6, el 41% en los niveles intermedios 2 y 3 y el 55% en los niveles inferiores 1 y debajo del nivel 1.

Por otra parte remontándonos a evaluaciones PISA anteriores, la problemática sobre los bajos promedios obtenidos en matemáticas y ciencias en México, según [2] y [3], significa que los alumnos no pueden identificar consistentemente, explicar y aplicar el conocimiento científico en una serie de situaciones de vida compleja, los resultados de esta evaluación indican que México tiene una proporción elevada de alumnos por debajo del nivel 2 (alrededor del 50 %), lo que implica que hay mucho por hacer para asegurar que nuestros jóvenes sean capaces de analizar, razonar y comunicarse de manera satisfactoria al plantear, resolver e interpretar problemas en diversas situaciones del mundo real porque no están siendo preparados para una vida fructífera en la sociedad actual.

Existen varios elementos que componen el problema, entre ellos se pueden citar la falta de preparación adecuada y/o actualización del profesor, la influencia de la sociedad y el entorno familiar que reproducen estereotipos que desalientan a la gran mayoría de los estudiantes a dedicarse a esta ciencia. Así mismo la amplitud de los programas de los cursos, la rapidez con que éstos se imparten, la falta de ejemplos que muestren la relación de las materias con el resto del currículum y la escasa motivación con que los emprenden, no permiten al alumno encontrarle un sentido de utilidad e importancia a las matemáticas.

II. PROBLEMÁTICA

El bajo rendimiento académico en la materia de matemáticas en el nivel educativo primaria es motivo de preocupación para el sistema educativo nacional, esto se puede constatar con los resultados de las evaluaciones [1], [2], [3], [4] y [5] llevadas a cabo en México.

Con respecto a las pruebas ENLACE, se tiene un comparativo del año 2006 al 2013 en el que se puede apreciar un supuesto avance en los niveles de logro obtenidos por alumnos de 3ro, 4to, 5to y 6to grados a nivel nacional. Sin embargo los porcentajes obtenidos a nivel nacional siguen siendo desalentadores pues no hay congruencia en el supuesto avance en las pruebas ENLACE con el estancamiento en los resultados que reflejan las

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

pruebas PISA, lo que hace evidente la necesidad de estrategias para mejorar la didáctica de las matemáticas.

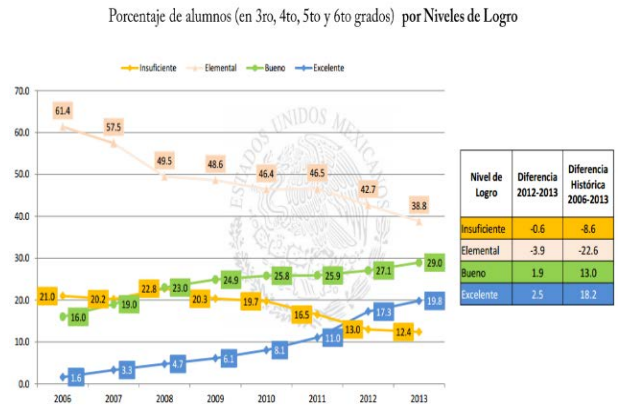


Figura 1. Prueba Enlace - Resultados Históricos Nacionales 2006 – 2013. Fuente: [5].

Esta situación se torna delicada tomando en cuenta el papel que juega el conocimiento matemático en los procesos de selección y promoción a niveles superiores de escolaridad, así lo expresa [6], quien a la vez considera que el bajo rendimiento escolar en la primaria es una problemática que requiere de atención y es importante dirigir esfuerzos para encontrar y poner a disposición de los maestros alternativas de enseñanza.

En relación con la importancia que implica mejorar la enseñanza de las matemáticas, [7] menciona que "el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas es un problema central para el sistema educativo mexicano y por ello la búsqueda de alternativas dirigidas a sacar adelante esta tarea cobra relevancia". A su vez [8] también expone una necesidad de afrontar el problema que existe con la ineficiencia en la enseñanza de las matemáticas, y argumenta que hay mucha apatía con esta materia por parte del estudiante.

Una problemática real, es que el alumno no siente agrado por las matemáticas, y en parte se debe a la forma cómo se enseña esta materia al interior del aula. Existen factores que están afectando el proceso de enseñanza aprendizaje de esta materia y que son: Una falta generalizada de profesores de ciencias en todos los niveles de los sistemas educativos [9], falta de dominio por parte del profesor, del contenido de matemáticas que imparte, existencia de profesores de ciencias que, aunque con un adecuado dominio del contenido matemático, carecen de una formación didáctica sólida y poca vinculación de su contenido con la realidad (descontextualización).

La enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, y de manera específica la enseñanza de las fracciones, recobra gran interés por ser un tema que causa mucha dificultad tanto para el profesor como para el alumno debido a los diferentes significados que abordan las fracciones en los programas de estudio y que suelen confundir al alumno [6];[10]. En la enseñanza tradicional se ha venido dejando a un lado la construcción del significado de las fracciones, y en quinto y sexto grado de primaria la comprensión de las fracciones equivalentes reviste gran importancia para poder comprender y asimilar posteriormente las operaciones básicas como la suma y la resta de fracciones. Sin embargo, en la práctica esta comprensión que viene de la mano con la construcción de su significado por parte del alumno, se ha sustituido por el aprendizaje de algoritmos y la mecanización de operaciones, que la mayoría de las veces carecen de sentido para la mayoría de los estudiantes, ocasionando una falta de aprehensión del conocimiento y por ende, su pronto olvido.

Con el propósito de hacer frente a la problemática que se plantea, sobre la dificultad que representa para los estudiantes de primaria el aprendizaje de fracciones, la presente investigación consistió en el reforzamiento de los indicadores de la comprensión de fracciones y fracciones equivalentes, mediante la realización de actividades multimedia colocadas en un ambiente virtual de aprendizaje (AVA) con el fin de lograr que los estudiantes encontraran sentido y significado a las operaciones básicas a través de la comprensión y construcción de este concepto.

III. PROPÓSITO DEL ESTUDIO

El propósito de la investigación fue determinar en qué medida el uso de recursos digitales contribuye a la comprensión del concepto de fracción equivalente. Para lograrlo se diseñaron, validaron e implementaron recursos digitales multimedia, que permitiesen a los estudiantes reforzar los indicadores de construcción del concepto de fracción equivalente, así como valorar el grado de comprensión de las fracciones equivalentes alcanzado por los estudiantes mediante el uso de estos recursos.

IV. METODOLOGÍA

La presente investigación se llevó a cabo a través de un estudio experimental de corte cuantitativo ya que según [11]:

> La esencia de la concepción de experimento es que requiere la manipulación intencional de una acción para analizar sus posibles resultados… se refiere a un estudio en el que se manipulan intencionalmente una o más variables independientes (supuestas causas-antecedentes), para analizar las consecuencias que la manipulación tiene sobre una o más variables dependientes (supuestos efectos-consecuentes), dentro de una situación de control para el investigador.

En esta investigación el diseño que se presentó es de tipo de Preprueba-Postprueba con grupos de control y experimental, cuyo esquema es:

O_1	X	O_2
O_3	----	O_4
O_5	X	O_6
O_7	----	O_8

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Donde:

O1 = Pretest de grupo de intervención de quinto grado	*O2 = Postest de grupo de intervención de quinto grado*
O3 = Pretest de grupo control de quinto grado	*O4 = Postest de grupo control de quinto grado*
O5 = Pretest de grupo de intervención de sexto grado	*O6 = Postest de grupo de intervención de sexto grado*
O7 = Pretest de grupo de control de sexto grado	*O8 = Postest de grupo de control de sexto grado*

V. PARTICIPANTES

El estudio se llevó a cabo con los alumnos de quinto y sexto grado de la escuela Valentín Gómez Farías de la ciudad de Boca del Río, Veracruz. La población estuvo conformada por 16 alumnos de quinto grado y 22 alumnos de sexto grado. La edad de los niños fluctuó entre los 10 y 12 años y en su mayoría pertenecen a un nivel socioeconómico entre medio y bajo.

La técnica de muestreo se llevó a cabo mediante una selección aleatoria para cada grupo de control y experimental, para ello se utilizó el programa Stats ver. 2.0. La siguiente figura muestra cómo se realizó la selección del grupo experimental de quinto grado.

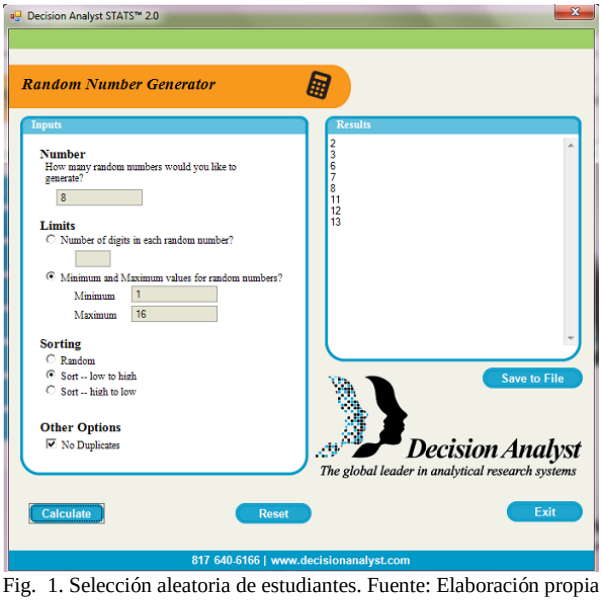


Fig. 1. Selección aleatoria de estudiantes. Fuente: Elaboración propia (2016)

Posteriormente, los números generados aleatoriamente se utilizaron para seleccionar a los estudiantes de acuerdo con el número de lista que cada uno tenía asignado en su grupo.

VI. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

El instrumento de recolección de datos utilizado fue tomado y rediseñado con base en el instrumento Assesment of Fraction Understanding (AFU) [12]. Este instrumento dio origen a los cuestionarios aplicados en las pruebas pre-test y post-test, así como en la elaboración de actividades multimedia resueltas por los estudiantes en el periodo de intervención.

Otro instrumento utilizado fue una base de datos generada por JClic y gestionada por Moodle en la que se registró el uso de las actividades multimedia por parte de los estudiantes en el periodo de intervención. Esta base de datos de JClic fue gestionada a través de un ambiente virtual de aprendizaje (AVA) que fue creado y alojado en el sitio http://colpostt.com/moodle.

Para poder capturar en una Base de Datos gestionada desde Moodle el nivel de eficiencia de cada actividad resuelta por el alumno, se instaló en Moodle el módulo Moodle-JClic que permite generar un reporte por estudiante de las actividades JClic que realice (tiempo empleado en la actividad, intentos, errores, aciertos), evitando así la necesidad de obtener una dirección IP pública para la configuración del servidor de reportes de JClic. En este sitio que fue diseñado especialmente para colocar las actividades multimedia que resolverían los estudiantes y que fueron conformadas por 4 paquetes.

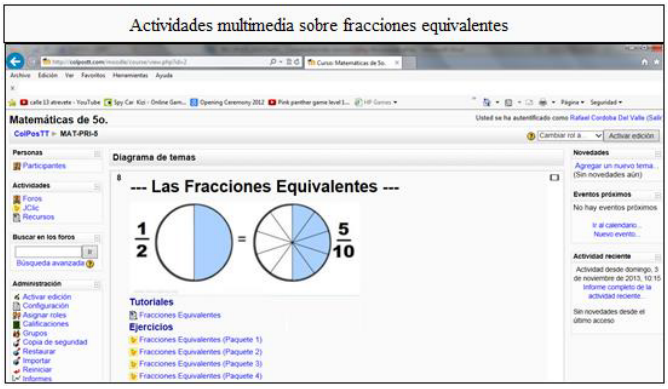


Fig. 2. Sitio http://colpostt.com con actividades multimedia. Fuente: Elaboración propia (2016).

La validez del instrumento guía (AFU) se realizó mediante el juicio de expertos, sin embargo, para corroborar la validez de criterio del instrumento aplicado en el presente estudio, los diferentes ítems sobre los indicadores para la construcción del concepto de fracción equivalente fueron sometidos a la revisión de expertos. Los revisores expertos fueron tres profesores de matemáticas de quinto grado y tres profesores de matemáticas de sexto grado de las escuelas primarias Jorge Pasquel Casanueva, Vicente E. Barrios y Valentín Gómez Farías.

La validez de contenido se llevó a cabo a través del piloteo del instrumento. La primera versión del instrumento estuvo conformada por 20 ítems que se sometió a un piloteo en el que participaron quince alumnos de quinto grado y veinte alumnos de sexto grado. Las respuestas generadas por los alumnos, así como las respuestas incorrectas y las no contestadas fueron analizadas por los tres profesores de

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

matemáticas de quinto grado y tres profesores de matemáticas de sexto grado de las escuelas primarias antes mencionadas, con el fin de determinar si el grado de dificultad de los ítems era el apropiado, si la redacción de los ítems era entendible para los alumnos y si el tiempo establecido era suficiente para la cantidad de reactivos. Finalmente la validez de constructo se llevó a cabo mediante la operacionalización de las variables independiente y dependiente en la que se identificaron y establecieron los indicadores que permitieron realizar su medición de forma cuantitativa.

Para la prueba de confiablidad del instrumento, de acuerdo con las características del estudio y considerando que el cuestionario pre-test y post-test son similares en contenido pero no idénticos, se determinó conveniente realizar la prueba de confiabilidad por el método de formas alternativas o paralelas [11]. Se utilizó el programa SPSS ver. 15.0.1 para Windows utilizando los resultados de los indicadores en los exámenes pre-test y post-test obteniéndose valores mayores a 0.8 para el coeficiente de fiabilidad de la escala (insesgada) en ambos grupos de control y experimental, por lo que se asume que la fiabilidad del instrumento es aceptable.

Se realizó una segunda prueba de confiabilidad mediante el cálculo del coeficiente alfa de Cronbach, obteniéndose los valores 0.77 y 0.751 para las pruebas pre-test y post-text de los grupos control y experimental de quinto grado, y los valores 0.888 y 0.834 para las pruebas pre-test y post-test de los grupos control y experimental de sexto grado respectivamente, por lo que se confirma que la fiabilidad del instrumento es aceptable.

VII. PROCEDIMIENTO

La investigación se llevó a cabo tomando en cuenta el modelo de diseño de material computacional interactivo de Camarena (2011), bajo una metodología conformada por los siguientes pasos:

1. Determinar los indicadores para la construcción del significado de las fracciones equivalentes.
2. Diseñar las actividades didácticas y elaboración de actividades multimedia de acuerdo con estos indicadores.
3. Procedimiento de implementación, análisis y discusión de resultados.

De acuerdo a la revisión de la literatura sobre la construcción del concepto de fracción, así como del concepto de fracción equivalente, se obtuvieron los indicadores para evaluar la comprensión del alumno en el tema de las fracciones equivalentes.

Se tomaron en cuenta los indicadores para la evaluación de la compresión de fracciones equivalentes establecidos por el instrumento Assesment of Fraction Understanding (AFU) el cuál fue desarrollado en la Universidad de Sídney y utilizado en el estudio de [12] para evaluar a 646 estudiantes de tercero a sexto grado de escuelas primarias urbanas en la comprensión conceptual de fracciones equivalentes. El instrumento AFU fue revisado por educadores en matemáticas, diseñadores de instrumentos y otros investigadores durante su desarrollo. Posteriormente se corroboraron estos indicadores con los establecidos por investigadores como [10] quien en sus estudios aborda la importancia de la fracción como medida. Asimismo [13] aborda aspectos relacionados con la identificación de fracciones en representaciones pictóricas. Por otra parte algunos estudios de [14] afirman que la *creación de* fracciones equivalentes es un indicador que puede estar presente cuando el estudiante logra una conexión entre una representación simbólica o pictórica con la recta numérica.

Los indicadores encontrados fueron:

A. Identificar una fracción en una representación pictórica,
B. Representar de forma pictórica una fracción simbólica,
C. Comparar fracciones,
D. Crear fracciones equivalentes y
E. Ubicar fracciones en la recta numérica.

Una vez establecidos los indicadores se diseñaron actividades didácticas de acuerdo con estos indicadores. Estas actividades didácticas conformaron el Pre-test aplicados a los alumnos de Quinto y Sexto grado (grupo control). Posteriormente con las actividades didácticas se elaboraron las actividades multimedia con el programa JClic que es una herramienta de autor que permite crear con facilidad recursos educativos digitales, y se desarrolló una plataforma virtual en Moodle en donde se colocaron estas actividades que fueron utilizadas por los alumnos de Quinto y Sexto grado (grupo experimental) durante un periodo de 4 semanas bajo la supervisión de un profesor en el centro de cómputo.

Después de finalizar el periodo de utilización de las actividades multimedia por los alumnos de los grupos experimentales de quinto y sexto grado, se procedió a la aplicación de la prueba Post-test a los alumnos de los grupos control y los datos obtenidos fueron analizados con las pruebas T-Student para muestras relacionadas aplicadas a los grupos de intervención y de control de quinto y sexto grado así como pruebas T-Student para muestras relacionadas para cada indicador para cada uno de los grupos control y experimental.

VIII. RESULTADOS

Los resultados de las pruebas Pre-Test y Post-Test aplicadas a quinto grado muestran un mejor desempeño en los indicadores *Comparar fracciones y Crear fracciones equivalentes* para el grupo experimental superando en ambas pruebas los resultados del grupo control el cual mostró su mejor desempeño en los indicadores *Identificar una fracción en una representación pictórica y comparar fracciones.* Ambos grupos mostraron mejores resultados en la prueba Post-Test en los indicadores mencionados.

Los resultados de las pruebas Pre-Test y Post-Test aplicadas a sexto grado muestran que el mejor resultado para el grupo experimental de sexto grado en ambas pruebas fue en el indicador *representar pictóricamente una fracción simbólica*, mientras que para el grupo control el mejor resultado también en ambas pruebas fue en el indicador *Crear fracciones equivalentes.*

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Además de los resultados mencionados, es importante recalcar que no reflejan una diferencia significativa entre ambas pruebas, sin embargo si existe una mejoría notable en los resultados nuevamente en el indicador *Crear fracciones equivalentes* (51.9% Pre-Test y 66.7% Post-Test) y en el indicador *Ubicar fracciones en la recta numérica* (22.2% Pre-Test y 50% Post-Test) para el grupo experimental, mientras que en el grupo control hubo mejoría en la prueba Post-Test en comparación con la prueba Pre-Test en casi todos los indicadores siendo más evidente la diferencia en los indicadores *Comparar Fracciones y Ubicar fracciones en la recta numérica.*

Se obtuvo como dato adicional el tiempo potencial y el tiempo real de uso de la computadora (en segundos), para los alumnos de quinto y sexto grado, obteniéndose que los estudiantes ocuparon en total, un tiempo de 75,329 y 85,818 segundos respectivamente frente a la computadora, pero resolviendo actividades multimedia sólo registraron 25,409 segundos los estudiantes de quinto grado y 20,522 segundos los estudiantes de sexto grado.

Si se obtuvo como tiempo potencial 75,329 segundos y como tiempo real 25,409 segundos, que los estudiantes de quinto grado registraron resolviendo dichas actividades, este último dato correspondió sólo al 33% del tiempo potencial, el resto del tiempo (63.3%) se refiere entonces al tiempo que estuvo en la computadora con las actividades multimedia sin prestarles mayor atención. Por otra parte, el grupo de sexto grado registró un tiempo potencial de 85,818 segundos y como tiempo real 20,522 segundos, es decir, sólo el 23.9 % del tiempo que estuvo en la computadora, las utilizó para realizar las actividades multimedia. Lo anterior dio pauta a considerar que muy probablemente hubo factores que distrajeron a los estudiantes en la realización de sus actividades multimedia, lo que pudo haber provocado el desperdicio de tiempo que se reflejan en las calificaciones bajas de algunos indicadores y el bajo desempeño a nivel global que también se registra, así también está latente la posibilidad de una falta de motivación ante las matemáticas debido a la dificultad que les representa.

En un estudio de correlación realizado no se encontró relación entre el tiempo de utilización de la computadora en las actividades multimedia y el desempeño del alumno de quinto grado en la prueba post-test. Sin embargo, es interesante observar que las actividades de los indicadores Identificar una fracción en una representación pictórica y Ubicar fracciones en la recta numérica fueron en las que los alumnos tardaron en promedio más tiempo en contestar y además tienen un alto índice de errores en las respuestas, lo que da pauta a deducir que las actividades de este indicador son las más difíciles o menos comprensibles para el estudiante de quinto grado, puesto que por el grado de complejidad que representa le consumió más tiempo y se equivocó más veces y que en este tipo de actividades el estudiante no se concentró y se distrajo, posiblemente por falta de motivación derivada de la complejidad que le representan, por lo que pudo haber dejado correr el tiempo sin contestar y al hacerlo, lo hizo sin un razonamiento adecuado incurriendo así en un gran número de errores.

IX. CONCLUSIONES

Con base en el análisis de los resultados obtenidos en la prueba T-Student para muestras relacionadas que se muestra en la tabla siguiente, para el valor Sig. Bilateral > 0.05 con un 95% de confianza no existe evidencia estadísticamente significativa para afirmar que las medias en los resultados del Pre-test y Post-test de los alumnos de los grupos experimental de quinto y sexto grado, así como del grupo control de quinto grado son diferentes, por lo que se asume que el uso de las actividades multimedia en los grupos de intervención no propició una mejora significativa en la construcción del concepto de fracción y en la comprensión de las mismas. Sin embargo para el grupo control de sexto grado si hubo diferencia estadística suficiente en las medias de los resultados Pre-test y Post-test, y aunque no se conoce con certeza por qué en el grupo control de sexto grado hubo diferencias significativas entre ambas pruebas, sin duda este resultado fue favorecido por otras variables que no fueron sometidas en este estudio como pueden ser los promedios general del grupo y en matemáticas, del ciclo anterior, ya que ambos promedios son más altos en el grupo control que en el experimental para el caso de sexto grado, contrario a los promedios de los grupos control y experimental de quinto grado.

Posteriormente se procedió a aplicar la misma prueba a cada indicador con el grupo experimental de sexto grado, observándose que en el caso de los indicadores *crear fracción equivalente y ubicar fracciones en la recta numérica* se obtuvieron los valores Sig. (Bilateral) menores que 0.05 por lo que estos resultados permitieron argumentar que con un 95% de confianza, hay evidencia estadística suficiente para afirmar que las medias en los resultados del pre-test y post-test son diferentes, por lo que para este grupo el uso de recursos digitales mostró una mejoría en los dos indicadores: *creación de fracciones equivalentes* y *ubicar fracciones en la recta numérica.*

Lo anterior es un resultado de gran importancia en la investigación ya que permite considerar que el uso de las actividades multimedia, bajo las condiciones y características en que se llevó a cabo el estudio, sí propiciaron una mejora significativa en los dos indicadores mencionados, lo que favorece la comprensión de las fracciones en el alumno.

Además los promedios general y de matemáticas de este grupo son inferiores a los del grupo control lo que confirma que efectivamente el uso de recursos digitales promovió la mejora en estos indicadores y por tanto favorecen el aprendizaje de las fracciones, lo que significa también que esta línea de investigación promete logros relevantes en la búsqueda de mejoras a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel primaria con apoyo de las TIC.

Se recomienda para trabajos futuros, tomar en cuenta para la selección de los grupos control y experimental, otras variables como la escolaridad de los padres, el género, los promedios general del ciclo anterior y el de matemáticas, que aunque sí fueron recolectadas, no fueron consideradas para la selección de los alumnos en la presente

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

investigación, así como ampliar el experimento a un mayor número de alumnos, pudiéndose replicar en otras escuelas y en otras localidades o regiones, con el fin cruzar información con muestras de diferentes contextos sociales y económicos de manera que enriquezcan los resultados.

Tabla 1. T-Student para muestras relacionadas aplicada a los grupos de intervención y de control de quinto y sexto grado.
Fuente: Elaboración propia (2014). Procesamiento estadístico de datos con el programa SPSS ver. 15.0 para *Windows*.

Grupo	Sig. Bilateral
Grupo de intervención de quinto grado	0.470
Grupo de control de quinto grado	0.794
Grupo de intervención de sexto grado	0.578
Grupo de control de sexto grado	0.033

REFERENCIAS

[1]. PISA. México en PISA. Resumen ejecutivo. Web http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/C/I127/P1CI127.pdf (2012). Accedido en junio de 2014.

[2] Viayra, M. PISA. Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos. México, último lugar escolar de la OCDE. Crónica.com.mx. Revista electrónica. Web http://www.cronica.com.mx/notas/2007/336377.html (2007). Accedido en mayo de 2014.

[3] PISA. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Información sobre México en PISA 2009. Web: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/informacion_pisa2009.pdf (2009). Accedido en mayo de 2014.

[4] SEP. Gobierno Federal. Resultados prueba Enlace 2011. Básica y Media Superior.
Web: http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2011/ENLACE2011_versionFinalSEP.pdf. Accedido en enero 2014.

[5] SEP. Resultados Históricos Nacionales 2006-2013. Evaluación Nacional del logro académico en centros escolares.
Web http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2013/historico/00_EB_2013.pdf. Accedido en enero 2014.

[6]. Figueras, O.; Filloy, E.; y Valdemoros, M. (1987). Distorsiones que obstruyen la construcción del concepto de fracción. Memorias de la primera reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa. (1987). México: Cinvestav, pp. 159-164.

[7] Silva Laya, M. La innovación en la enseñanza de las matemáticas en primaria: El modelo de matemáticas constructivistas. Instituto de investigaciones para el desarrollo de la educación. Centro de investigación de modelos educativos. Universidad Iberoamericana, México. (2008).
Web http://www.cimeac.com/images/documento_inide.pdf . Accedido en febrero 2015.

[8] Briceño, Juan C. (2011). La educación en las matemáticas bajo un entorno tecnológico. Cuadernos de Educación y Desarrollo, vol. 3, N° 26. Universidad de Málaga. Unidad de Investigación en Educación Matemática UIEMAT. (2011).
Web http://www.eumed.net/rev/ced/26/jcb.htm. Accedido en marzo 2015.

[9] Ruíz, J.M. Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. Camagüey, Cuba. (2008).
Web: http://rieoei.org/deloslectores/2359Socarras-Maq.pdf. Accedido en agosto 2014.

[10] Perera, P. y Valdemoros M. Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. Investigación en educación matemática XI, 209-218. México. (2007). Web http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2697033. Accedido en junio 2012.

[11] Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. Quinta Edición, Mc Graw Hill, pp. 613.

[12] Wong, M. Assesing students´s knowledge and conceptual understanding of fraction equivalence. Unpublished doctoral thesis. University of Sydney, NSW, Australia. (2009).

[13] López, J. F. Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo. Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Colombia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Manizales, Colombia. (2012).
Web http://www.bdigital.unal.edu.co/5922/1/8410009.2012.pdf accedido en septiembre 2013.

[14] Llinares, S. y Sánchez V. Fracciones: La relación parte-todo. Volumen 4 de Matemáticas, cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid (1988).

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Actividades didácticas para la enseñanza de las funciones racionales con Excel

Elvia Rosa Ruiz Ledezma #, Fermín Acosta Magallanes*, Alma Rosa Villagómez Zavala ^
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos Wilfrido Massieu. Instituto Politécnico Nacional, Av. de los maestros 217, Miguel Hidalgo, Colonia Casco de Santo Tomás. C.P. 11340, Ciudad de México, D.F., México.
* Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas. Instituto Politécnico Nacional, Avenida Instituto Politécnico Nacional 2508, Gustavo A. Madero, Barrio la Laguna Ticomán, C.P 07340, Ciudad de México, D.F., México.
^Escuela Normal Superior de México, Calle Manuel Salazar 201, Colonia Ex Hacienda El Rosario Azcapotzalco, Azcapotzalco, Ciudad de México, D.F.,México
ruizelvia@hotmail.com, facosta66@hotmail.com, amyy_0214@hotmail.com

***Resumen*- En esta investigación se aborda la aplicación de actividades didácticas con Excel para la enseñanza de funciones racionales en estudiantes de nivel medio superior. Las actividades fueron aplicadas a jóvenes de quinto semestre de uno de los Centros de estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional, en la Ciudad de México. Para realizar el análisis de las respuestas se utilizó la teoría de los registros de representación en conjunción con la teoría de la génesis instrumental. Las respuestas obtenidas permiten darnos una idea de los conceptos que van construyendo los estudiantes.**

***Palabras Clave*- actividades didácticas, funciones racionales, génesis instrumental, registros de representación.**

***Abstract*- In this research the application of educational activities with Excel for teaching rational functions in senior high students addressed. The activities were applied to youths fifth semester of one of the Centers of Scientific and Technological Studies of the National Polytechnic Institute in Mexico City. The theory of representation registers in conjunction with the theory of instrumental genesis was used for the analysis of responses. The answers obtained allow us an idea of the concepts that are building students.**

***Keywords*- education activities, rational functions, instrumental genesis, representation registers.**

I. INTRODUCCIÓN

En la investigación sobre el uso de la tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ha habido una gran cantidad de trabajos, utilizándose diversas teorías de la Matemática Educativa (ME). Inicialmente los investigadores le apostaron a la potencialidad de las herramientas tecnológicas, dejando de lado las fundamentaciones teóricas, posteriormente las investigaciones apuntaron a cuestiones de visualización y conexión entre los diferentes registros de representación [1]. En el presente siglo y hasta la fecha con la construcción teórica de la aproximación instrumental, se ha profundizado sobre el uso de la tecnología en las clases de matemáticas, no siendo solamente adaptaciones de actividades en lápiz y papel sino actividades encaminadas hacia la conceptualización del conocimiento [2].

En este documento presentamos una propuesta de actividades para la enseñanza de las funciones racionales con el uso de EXCEL, así como las construcciones que van haciendo los estudiantes al trabajarlas.

Para los estudiantes de nivel medio, el aprendizaje de estas funciones representa obstáculos que se han venido estudiando, en donde se abordan conceptos asociados al de función racional, como es el caso de los conceptos de límite e infinito.

Además dados los resultados de la prueba nacional [Plan Nacional para las Evaluaciones de los Aprendizajes (PLANEA)] en estudiante de nivel medio superior, se hace necesario continuar con actividades donde el estudiante construya diversos objetos matemáticos.

II. PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

En nuestras clases de matemáticas, quisiéramos que nuestros estudiantes, fueran capaces de trabajar con cierta información y traducirla efectivamente a otra; considerando nuestro tema de investigación, desearíamos que dada una función en el contexto algebraico; el estudiante de nivel medio superior, trazara su gráfica correspondiente y aún más ambiciosamente, que dada la gráfica, escribiera su respectiva expresión algebraica y que expresara sus comportamientos con una adecuada notación matemática. De esta premisa se desprende el propósito de investigación: "la construcción del concepto de función racional"; en donde además consideramos necesario revisar cómo con el uso de la herramienta computadora, sus periféricos y el software Excel, el estudiante hace estas construcciones, en el marco de los registros de representación.

III. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Nuestro marco de referencia está formado por la teoría de la Génesis Instrumental y la teoría de los Registros de Representación.

La génesis instrumental enfatiza el uso de la herramienta como un medio para que el estudiante construya su conocimiento a través de las técnicas y esquemas mentales que desarrolla y aplica mientras usa el artefacto.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Consideramos la teoría de la génesis instrumental para explicar la relación entre las actividades que se espera realice el estudiante a través del uso de la herramienta tecnológica (en este caso computadora con sus periféricos, sistema operativo, software y las actividades didácticas), como mediadora entre los estudiantes y el concepto matemático sobre el que se trabaja, los alumnos se adapten a la herramienta y adaptan la herramienta para la construcción de conocimientos [3].

Sobre la teoría de los registros de representación, suponen un beneficio para el sujeto, pues va generando un significado progresivo de los objetos representados. Cada sistema de representación expresa algo del concepto.

Cuando nos referimos a los objetos matemáticos, Duval [4] nos dice que no son directamente accesibles a la percepción, por lo que se hace necesario poder proporcionar representantes, para que podamos interpretar al objeto en cuestión.

Todas estas situaciones pocas veces las tiene presentes un profesor, al abocarse a una misma representación para más de un objeto matemático, o en más de una tarea, provocándose una dependencia entre la representación y el objeto, impidiendo al estudiante que se mueva en otros registros, no siendo posible que se lleve a cabo el proceso de construcción del concepto, al no reconocer las propiedades comunes en los diferentes sistemas semióticos de representación.

Así nos percatamos que en nuestras clases predomina un trabajo mono-registro (registro algebraico), haciéndose necesario interactuar con otros registros o partir de alguno diferente.

Un manipulador simbólico, como una computadora o calculadora graficadora y el uso de algún software, nos proporcionará grandes expectativas en la construcción de conceptos matemáticos inmersos en el marco de los sistemas de representación.

A. Población participante

Las actividades han sido aplicadas a estudiantes de quinto semestre de un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional (CECyT) en tres sesiones de dos horas cada una. Los 10 alumnos participantes en las sesiones fueron elegidos de acuerdo al conocimiento de los profesores del grupo, se formaron parejas de alumnos de buenas calificaciones, alumnos de calificaciones promedio y alumnos con bajas calificaciones. La aplicación se llevó a cabo en un laboratorio de cómputo del CECyT.

Los dos profesores que realizaron la aplicación permitieron que los estudiantes exploraran libremente las acciones en cada una de las actividades.

IV. METODOLOGÍA

Las actividades didácticas parten de tres diferentes registros de representación con el objeto de irlos relacionando a lo largo de cada actividad, pues consideramos que un conocimiento asociado a un concepto es más estable en un alumno, si puede reconocerlo en sus diferentes representaciones [5].

En términos algebraicos. Se presenta la función racional, a continuación solicitamos el llenado de una tabla, que el estudiante introducirá en una hoja de excel, para posteriormente hacer la gráfica , observando así el comportamiento que presenta la función alrededor de un número, sucesivamente se le insta a que encuentre los comportamientos restantes

En términos numéricos. Presentamos una tabla donde se encuentran concentrados algunos puntos que pertenecen a la función propuesta, con la idea de que el alumno al introducir los valores en una hoja de Excel, observe el comportamiento, pudiendo así construir la asíntota horizontal en el contexto algebraico, es decir expresarla específicamente.

En términos gráficos. Mostramos la gráfica de una función, explícitamente señaladas las asíntotas, además se proporciona una tabla, para evitar errores de apreciación visual, esta le servirá al estudiante para verificar la correcta representación algebraica.

A. Descripción de las actividades

Actividad 1

Partimos del registro algebraico, proponiéndonos dos objetivos.

-Contruir las asíntotas verticales y horizontales como el comportamiento de la curva en los infinitos y alrededor de una x=c.

- Graficar correctamente la función y=f(x)

Actividad 2

Partimos del registro tabular, teniendo como objetivos.

-Construir la gráfica correcta de la función y=f(x), así como su expresión algebraica, articulando el registro gráfico con el algebraico.

-Articular los comportamientos de la curva con su respectiva notación matemática **(**registro numérico con algebraico).

Actividad 3

Se inicia con la gráfica, apoyándonos fuertemente en el registro tabular, teniendo como objetivos.

-Articular el registro numérico con el algebraico al construir la asíntota vertical.

-Expresar con una adecuada notación matemática la asíntota oblicua, interactuando en los registros gráfico y algebraico.

-Construir la expresión algebraica de la función y=f(x), articulando el registro gráfico con el algebraico.

B. Análisis

Los alumnos los designamos con la letra A mayúscula y los números 1 o 2.

Específicamente las acciones que realiza el estudiante las clasificamos en:

-Acciones ligadas al artefacto. Cuando el alumno utiliza el teclado y el ratón, para generar, borrar, dibujar, llenar la tabla y graficar.

- Acciones percepto-gesturales. Cuando el estudiante manifiesta señalando en la pantalla sus consideraciones y cuando gesticula al hacer alguna construcción.

Las repuestas de los estudiantes las hemos categorizado en las siguientes acciones, a las que llamamos acciones instrumentadas (AI).

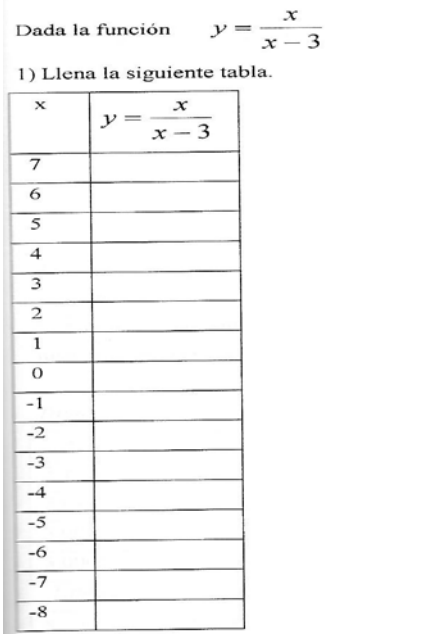
AI1 Construye la asíntota vertical.
AI2 Construye la asíntota horizontal.
AI3 Construye la gráfica
AI4 Completa las expresiones matemáticas.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

AI5 Escribe la expresión matemática de la función.

AI6 Construye la asíntota oblicua.

Acciones instrumentadas de la pareja de alumnos A1 y A2.


Dada la función $y = \frac{x}{x-3}$

1) Llena la siguiente tabla.

x	$y = \frac{x}{x-3}$
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	
-4	
-5	
-6	
-7	
-8	

Fig. 1 Actividad didáctica 1

En estos momentos la pareja de alumnos A1 y A2 está viendo la función y la tabla de la fig. 1, se les solicita que la llenen, en una hoja de Excel y posteriormente grafiquen.

Los primeros minutos los alumnos van llenando la tabla y comentan sobre el valor x=3, revisando que no hay un valor numérico para la ordenada (AI1). La intención es sondear en primera instancia las ideas que el estudiante tiene sobre la recta x=3, después de haber interactuado con el registro tabular y algebraico. Posteriormente se le solicita el llenado de otras dos tablas (marco numérico), para que reconsideren sus respuestas, así como para que puedan construir la idea del comportamiento de y=f(x) alrededor de x=3.

A continuación se inicia en el marco numérico la construcción de la asíntota horizontal (AI2), para lo que se le proporcionan dos tablas más para ser llenadas y que grafiquen. En esta parte los estudiantes comentan que el valor de la ordenada es 1.

Por lo que respecta a completar las expresiones matemáticas, los alumnos piensan mucho sobre el valor correcto y deciden utilizar la expresión algebraica haciendo sustituciones (AI4).

V. RESULTADOS

Los estudiantes están tan acostumbrados a trabajar los límites por manipulación algebraica, sustituyendo el valor al que tiende x, no aplicando sus propiedades, así como no llegando a un proceso de abstracción.

El tratar los límites en el registro tabular, ocasiona al estudiante un serio conflicto, pues una minoría reconoce el comportamiento de la función tratado numéricamente, esto es el interpretar información vaciada en una tabla representa un obstáculo.

Parece ser que el obtener información a partir del registro gráfico, siempre y cuando sean reconocidas en el registro algebraico las funciones propuestas gráficamente, da al estudiante la seguridad de responder, pues la lectura directa de la gráfica no lo conduce a nada.

Un impedimento para que el estudiante interprete los comportamientos solicitados en el registro analítico lo representa, el no poder asegurar una expresión algebraica que designe a la gráfica que se le presenta, pues no puede procesar información directamente de una gráfica.

Además nos encontramos que los estudiantes no se sienten cómodos, a la solicitud de expresar con notación matemática (registro algebraico) el comportamiento de la función. Por lo que es necesario darle más tiempo de trabajo a esta situación.

VI. CONCLUSIONES

El marco de las representaciones semióticas, en conjunción con la génesis instrumental, presentan un ambiente que posibilita la construcción de conceptos matemáticos, pues el estudiante tiene la oportunidad de ver al concepto en diferentes facetas, a las que se les llama registros, pudiendo transitar entre ellos y con la posibilidad de reconocer las propiedades comunes y no comunes de un mismo objeto matemático, esto es efectuar tratamientos específicos y avanzar en las construcciones instrumentadas.

La habilidad para usar la tecnología, favorece al desarrollo de las capacidades de los estudiantes, al manejar información de una manera más rápida, resolver algoritmos de manera casi trivial, y tener acceso a diferentes representaciones entre otras.

La introducción del concepto de función racional de esta manera, permitió darle sentido a determinados conceptos: función, límite e infinito, en un contexto dinámico, pudiendo el estudiante conjugarlos y darle sentido a su curso de cálculo y no como entes aisladas, sino como un todo para su aplicación en otros temas del curso.

La puesta en práctica de las actividades didácticas, implicó un trabajo colaborativo del estudiante, una interacción con situaciones problemáticas, donde con el apoyo de su herramienta debía resolverlas; modificando, complementando, revisando o rechazando sus conocimientos anteriores, con la finalidad de formar nuevas concepciones que le permitan avanzar.

REFERENCIAS

[1] Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M.-A., En C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI study* (pp. 89-132). London: Springer. (2010).

[2] Artigue, M., Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274 (2002).

[3] Drijvers, P. y Gravemeijer, K., Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. En D. Guin, K, Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 163-196). New York: Springer Verlag. (2005).

[4] Duval, R., Semiosis y Noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Antología de Educación Matemática. Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa* (pp. 118-142). México: CINVESTAV-IPN. (1993).

[5] Hitt, F., Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 213-224. (2003)

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen I"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Experiencia docente, un acercamiento al modelo de Van Hiele a través del análisis de las propiedades de rotación y traslación de figuras, utilizando Geogebra

Brenda Aisel Ramírez De La Rosa,[1] Sonia Monserrat Cruz Venegas[2] y Marleny Hernández Escobar[3]
Escuela Normal Superior de México, Licenciatura en educación secundaria, Especialidad en matemáticas, Av. Manuel Salazar 201, colonia ExHacienda el Rosario, Azcapotzalco, Ciudad de México, México.
baramirez302@gmail.com, monserratcruz1301@gmail.com, marlenylesly@hotmail.com

***Resumen*- La finalidad de este artículo es dar a conocer la experiencia que hemos tenido como futuros profesores con un grupo de alumnos de tercer grado de secundaria, haciendo un análisis de actividades aplicadas, usando el modelo de los Van Hiele para hacer una reflexión acerca de cómo estamos llevando a cabo nuestra práctica docente, de manera que tengamos un marco referencial para hacer planes de clase con temas de geometría. Así mismo hablamos de la importancia y el impacto de las TIC dentro de un salón de clases, ya que tienen que ser vistas como una herramienta que permitan conducir al alumno hacia el conocimiento. Se analizan las situaciones presentadas en las prácticas educativas con la finalidad de aumentar el uso de medios tecnológicos en nuestras prácticas docentes.**

***Palabras Clave*- Prácticas docentes, Modelo de Van Hiele, futuros profesores, Geogebra, geometría.**

***Abstract*- The purpose of this article is to present the experience we have had as future teachers with a group of third graders of high school, doing an analysis of applied activities, using the model of the Van Hiele to do a reflection on how we are conducting our teaching practice, so that we have a framework for lesson plans with geometry topics. We talked about the importance and impact of the TIC in a classroom, as they need to be seen as a tool likely to lead the student to knowledge. The situations presented in the teaching practices were analyzed in order to increase the use of technological media in our teaching practices.**

***Key Words*- Teaching Practices, Van Hiele's Model, Future Teachers, GeoGebra, Geometry.**

I. Introducción

Como docentes en formación tenemos la responsabilidad de adentrarnos en el mundo de la docencia, es por tanto que es de interés analizar situaciones que se presentan en el aula de clases, especialmente aquellas que van dirigidas al uso correcto de las TIC y de los materiales con los que se pueden trabajar temas de geometría.

Además, es sumamente importante que aprendamos a realizar planificaciones que vayan acordes al proceso de enseñanza-aprendizaje de nuestros adolescentes, debido a que consideramos que no solo basta con enseñar un contenido sino que nuestra labor docente va más allá.

Esta reflexión se escribe debido a que, al realizar análisis posteriores de las clases impartidas, nos dimos cuenta que nuestra secuencia didáctica no fue lo que esperábamos, entonces, nos dimos a la tarea de investigar a algunos autores para justificar por qué nuestra planificación no funcionó, en la revisión de la literatura encontramos el modelo de los Van Hiele que dio respuesta a algunas interrogantes planteadas, notando que para realizar planificaciones debemos tener el sustento de una teoría o un modelo didáctico que argumente lo que estamos realizando.

II. La importancia del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas

Actualmente los docentes se enfrentan a diversos retos con el fin de satisfacer las necesidades que la sociedad les demanda, para ello es necesario el desarrollo de competencias, habilidades y actitudes que van más allá de solo impartir una clase, considerando que Giménez menciona: ...debemos aprender a interpretar nuestro nuevo rol como facilitadores del conocimiento y no tanto como instructores [1], por tal motivo como profesores tenemos que buscar otros medios que permitan que el estudiante adquiera los aprendizaje esperados que están establecidos en el currículum.

Específicamente hablando de la asignatura de matemáticas, es importante señalar que los resultados no son del todo satisfactorios, hemos observado que la enseñanza que se imparte en las aulas ha sido la misma cátedra desde hace años, es decir, los profesores tienden a utilizar la misma estrategia de querer dar el tema y poner ejercicios, no permiten que el alumno reflexione o analice la situación problema para que le dé solución utilizando los medios con los que dispone, como menciona Maldonado sobre la teoría de Ausubel ...el aprendizaje significativo permite al alumno relacionar su mundo interno con el externo, lo que conoce con lo que ha de conocer, que lo lleve a la autonomía de su modo de pensar...[2].

Necesitamos utilizar nuevas estrategias que permitan acercar al estudiante al conocimiento y no solo eso, sino buscar la forma de vincularlo con los intereses propios de los alumnos a fin de motivarlos. Una de estas herramientas son las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) que hoy en día han tenido un auge significativo para la sociedad debido a que las personas que no estén inmersas en ellas no son consideradas competentes para el campo laboral. Por ello cada vez aumentan más las demandas educativas que

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

exigen que se utilicen las TIC para lograr que el aprendizaje de los alumnos se genere conforme a las competencias para la vida. De acuerdo a la Ley General de Educación (LGE) se debe fomentar el uso responsable y seguro de las TIC en el sistema educativo, para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, ampliar sus competencias para la vida y favorecer su inserción en la sociedad del conocimiento. [3]

Por tanto, el uso de las TIC es indispensable para la sociedad mexicana porque necesitamos elevar la calidad de la educación de manera que seamos competentes a las principales potencias mundiales, procurando la innovación en el campo tecnológico. Sostenes menciona que la falta de educación innovadora podría convertirse en una barrera para el país, ya que si no se cuenta con educación productiva, actualizada y bien cimentada se estaría formando un conocimiento que podría fácilmente desacreditarse por su ambigüedad. [4]

Como seres humanos tenemos miedo al cambio y en los docentes no es la excepción mencionamos esto porque de acuerdo a las observaciones de clase que hemos realizado, varios de los profesores se reúsan a cambiar su forma de enseñanza, esto debido a un sin fin de circunstancias, algunas de ellas son la falta de:

- tiempo de la clase;
- actualización profesional;
- apoyo por parte de la institución;
- equipos de cómputo, etc.

Pero las dificultades no solo se presentan en los docentes que tienen miedo al cambio, también surgen otro tipo de dificultades en los maestros que intentan favorecer dicho cambio, estando de acuerdo con Giménez: incluso para el profesorado más activo, motivado y convencido de la necesidad de cambio, puede resultar muy complicado tener la certeza de estar planificando las materias que imparte de forma adecuada para conseguir el aprendizaje más significativo posible por parte de su alumnado. [1]

III. Modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría

Existen diversas teorías que se han utilizado para fundamentar y explicar cómo se apropian los alumnos del aprendizaje en la rama de la geometría, algunas de ellas son de autores como: Piaget, Ausubel, Duval, Van Hiele, etc.

Al revisar las teorías de estos autores y de acuerdo al contenido que se analizará para este artículo consideramos que la teoría de Van Hiele es la adecuada para justificar nuestro análisis puesto que a pesar de que data de 1957, mantiene vigente la didáctica que se pretende utilizar en estos tiempos.

La teoría de los Van Hiele fue introducida por los esposos Dina y Pierre Van Hiele en el libro titulado "Structure and Insight" donde se habla de un modelo en el que propone 5 niveles de pensamiento que un estudiante puede alcanzar si la secuencia aplicada es organizada conforme a las 5 fases que se proponen aplicar en cada nivel. Estando de acuerdo en lo que menciona Fouz y Donosti: el aprendizaje de la Geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no van asociados a la edad y que sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente. [5]

Para realizar el análisis de las actividades propuestas es importante mencionar de qué se tratan los niveles y fases de este modelo.

De acuerdo a Fouz y Donosti que hacen referencia a Van Hiele [5]:

NIVEL 0: Visualización o reconocimiento

- Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno. No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
- No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo

NIVEL 1: Análisis

- Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación.
- De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades, pero no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras.
- Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades.
- empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático

NIVEL 2: Ordenación o clasificación

- Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir.
- Realizan clasificaciones lógicas de manera formal, reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
- Siguen las demostraciones.

NIVEL 3: Deducción formal

- Se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.
- Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.
- Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas.

NIVEL 4: Rigor

- Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.
- Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Se ha de mencionar que las fases ayudan al profesor a secuenciar y organizar el contenido matemático llevando así al alumno de un nivel a otro de forma gradual.

FASE 1: Preguntas/información

Se trata de determinar, o acercarse lo más posible, a la situación real de los alumnos/as. Está fase es oral y mediante las preguntas adecuadas se trata de determinar el punto de partida de los alumnos/as y el camino a seguir de las actividades siguientes.

FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

De la experiencia docente, dependerá el rendimiento de los alumnos/as (resultados óptimos frente al tiempo empleado) este no será bueno si no existen una serie de actividades concretas, bien secuenciadas, para que los alumnos/as descubran, comprendan, asimilen, apliquen, etc. las ideas, conceptos, propiedades, relaciones, etc. que serán motivo de su aprendizaje en ese nivel.

FASE 3: Explicación (explicitación)

Es una fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre alumnos/as y en la que el papel del profesor/a se reduce en cuanto a contenidos nuevos y, sin embargo, su actuación va dirigida a corregir el lenguaje de los alumnos/as conforme a lo requerido en ese nivel.

La interacción entre alumnos/as es importante ya que les obliga a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás.

FASE 4: Orientación libre

Aparecen actividades más complejas fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario.

Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más potente.

FASE 5: Integración

No se trabajan contenidos nuevos, sino que sólo se sintetizan los ya trabajados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía.

Aunque no se ha explicitado las actividades de evaluación, también se integrarían fácilmente en esta estructura de actividades.

IV. Experiencia docente en la práctica educativa

Se realizó un estudio en una escuela secundaria de la Ciudad de México, en una zona con altos índices de delincuencia. En esta práctica educativa se trabajó con alumnos de tercer grado aplicando una secuencia didáctica referente al contenido de: análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. Hacemos hincapié en que la organización de esta secuencia no se realizó conforme a los niveles y fases de Van Hiele, por tanto, haremos un comparativo de los resultados obtenidos para considerar por qué es importante aplicar este modelo en la realización de la secuencia didáctica.

Primeramente, consideramos relevante aludir que en la secuencia aplicada introducimos el manejo de las TIC utilizando un software llamado Geogebra, el cual fue creado por Markus Hohenwarter en el 2001, este lo elegimos porque además de ser gratuito ofrece diferentes aplicaciones para abordar temas matemáticos y su facilidad para utilizarlo lo hace único.

Antes de aplicar nuestra secuencia didáctica nos enfrentamos a diferentes situaciones que influyeron en utilización de las TIC, por mencionar algunas:

- Falta de equipo de cómputo;
- Falta de apoyo docente;
- Choque de los horarios para utilizar el aula digital;
- Tiempo que se ocupa para el traslado de los alumnos de su aula a la sala de cómputo y que resta tiempo de la sesión;
- Docentes que no concluyeron su clase a tiempo y restaban minutos a nuestra sesión;
- Incumplimiento de las responsabilidades de la docente encargada de la sala de cómputo (el salón no se abrió a tiempo, falta de permanencia en la instalación del software, etc.) y,
- Falta de manejo del programa por parte de los alumnos.

Todas estas situaciones hicieron que nuestra práctica educativa tuviera que ser adaptada a las necesidades que la escuela nos demanda. Esto no debería ser un conflicto para nosotros porque como futuros docentes tenemos que prever situaciones que pueden interferir la realización de la secuencia didáctica, por tales motivos tenemos que tener esa flexibilidad de modificar la planificación y adaptarse a cualquier metodología y resultado.

La aplicación de la secuencia se realizó en el aula utilizando medios como el pizarrón, el trazo con lápiz y papel, y posteriormente el aula digital.

Como anteriormente lo mencionamos esta secuencia no fue planificada con base al modelo de Van Hiele, pero para realizar el comparativo ubicaremos la aplicación de la planificación de acuerdo a los niveles y fases del modelo destacando cuáles se presentaron y cuáles no.

NIVEL 0:

Fase 1: Se realizaron cuestionamientos a los alumnos para conocer sus conocimientos previos, las preguntas que se formularon fueron de forma oral, algunas de ellas son:

- ¿Qué entienden por simetría?
  Los alumnos respondieron haciendo referencia al eje de simetría en donde una figura se partía en dos, sin embargo, no reconocían aun las propiedades de esta.
- ¿Qué entienden o han escuchado sobre traslación?
  A pesar de que los alumnos se encontraban en tercer grado no pudieron dar un concepto sobre la traslación, aunque se les pidió que dieran cualquier idea no pudieron formularla.
- ¿En una traslación cómo son las líneas que unen los puntos correspondientes de las figuras?

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Para dar respuesta a la pregunta los alumnos observaron la Figura 1.

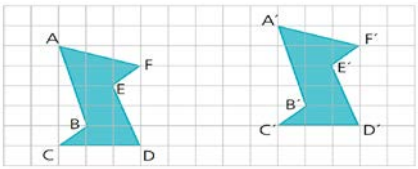


Fig. 1 Actividad de reconocimiento de la traslación

Posteriormente se les pidió que unieran los puntos con su simetría respectivamente, luego mediante lo observado los alumnos concluyeron que las líneas que unian los puntos con sus homólogos eran paralelas, aunque desconocían el por qué sucedía esto.

- ¿Qué es rotación?
  Los estudiantes respondieron que la rotación tiene que ver con girar algo; no se identificaron las propiedades que esta conlleva.

Fase 2: En esta fase el objetivo de la secuencia didáctica era que los alumnos identificaran las características de la traslación mediante trazos.

Una de las actividades que se propuso fue que trazaran una figura homóloga a partir de un vector de traslación, en esta actividad se esperaba que los alumnos identificaran que a partir del trazo de las paralelas que pasan por los vértices de la figura se podía encontrar los puntos homólogos, conservando las distancias del vector de traslación con ayuda del compás, así también el establecer que la imagen y la figura original eran congruentes.

Lamentablemente fueron muy pocos los alumnos que lograron visualizar lo que sucedía en la traslación.

En otra de las actividades se les otorgó a los alumnos un cuadrado de papel y se les pidió doblarlo en 4 partes iguales, después tenían que tomar la esquina donde no se encontraban aberturas y a partir de ahí debían marcar la diagonal, luego se les solicitó que dibujaran una figura desde la diagonal a la abertura del dobles anterior y que cortaran sobre la figura que marcaron. Obsérvese en la Figura 2. En esta actividad se esperaba que los alumnos visualizaran la rotación y lograran identificar algo acerca de ésta, pero ellos solo encontraron que todo gira en torno a un punto y que la figura permanece igual, no cambia en tamaño ni forma. En esta fase se logró que los alumnos tuvieran algún conocimiento respecto a lo que es traslación y rotación.

Fase 3: Esta fase no fue propia solo en este momento, ya que el diálogo se presentó en todo momento entre profesor y alumno, siempre se procuraba que el lenguaje matemático fuera corregido y con ayuda de varios cuestionamientos se lograba conocer el aprendizaje de los alumnos.

Fase 4: A partir de lo ya aprendido los alumnos resolvieron actividades con mayor nivel de dificultad, pero hacemos énfasis en que esta fase no se dio correctamente puesto que solo se trabajó con rotación, además de que los alumnos no llegaron a identificar movimientos, elementos y características en figuras previamente establecidas. Es por lo anterior que no se logró llegar a la fase 5.

Fig. 2 Actividad de la rotación con doblado de papel, realizada por un alumno.

NIVEL 1:

Fase 1: En este nivel no se realizó esta fase ya que se contaba con esta información debido a lo abordado en el nivel anterior.

La primera fase se puede obviar en algunos casos pues, dado que su finalidad es que el profesor obtenga información sobre los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos y que éstos la obtengan sobre el campo de estudio, cuando existe con anterioridad esta información no es necesario realizar el trabajo específico de esa fase. [2]

Fase 2: Las actividades que se propusieron para este nivel tenían el objetivo de que los alumnos pudieran reconocer la diferencia entre rotación y traslación, así mismo lograran aplicar la traslación y rotación de una figura mediante sus propiedades. En la actividad de la Figura 3 los alumnos tenían que reconocer el punto de rotación, identificándolo mediante sus respetivas propiedades, la mayoría de los estudiantes lo identificó solo en las figuras más evidentes, ya que hubo algunas en las que no lograron visualizar el movimiento.En la Figura 4 los alumnos tenían que aplicar la traslación a las figuras para que de esta manera utilizaran las propiedades de esta transformación, sin embargo, tuvieron dificultades debido a que se les complicó encontrar los puntos homólogos.

Fase 3: Los alumnos utilizaron las TIC para aplicar los conocimientos adquiridos hasta el momento, en la actividad propuesta se esperaba que los estudiantes pudieran aplicar las propiedades correspondientes a cada transformación, sin embargo, aunque fue notorio que ellos se sintieron motivados por utilizar un medio dinámico diferente, (en este caso el software Geogebra) se presentaron dificultades para poder resolver las actividades propuestas debido a que los alumnos no manejaban los conocimientos de las propiedades de las figuras. Un ejemplo de ello como se muestra en la Figura 5, es que para realizar la rotación de un rayo los discentes no tenían los elementos para realizar la transformación, por tal motivo se tuvieron que dar indicaciones paso por paso de cómo elaborar el trabajo solicitado. Aun así, esto no fue suficiente, también se debía dar asesoría individual porque muchos de ellos tenían problemas con las definiciones geométricas.

Fig. 3 Actividad para la identificación de las propiedades de rotación, realizada por un alumno.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

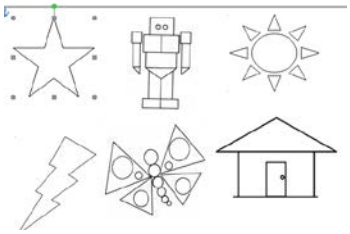


Fig. 4 Actividad para identificar las propiedades de la rotación

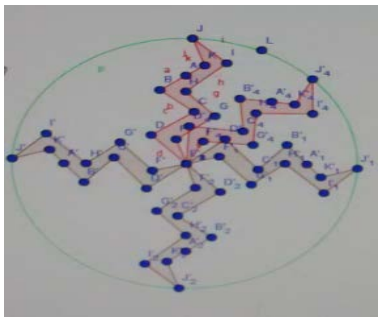


Fig. 5 Produccion de un estudiante, aplicando la rotación.

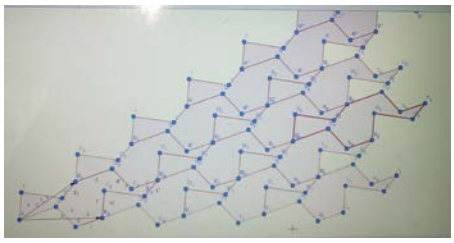


Fig. 6 Teselado realizado por un alumno

Respecto a la actividad de la traslación (obsérvese la Figura 6), se esperaba que se realizará un teselado, utilizando las propiedades de la traslación, pero se tuvieron más problemáticas en el trabajo porque los estudiantes olvidaban colocar los vectores, además las propiedades de esta transformación se vieron omitidas porque a pesar de que el trabajo se logró realizar de igual manera que en la rotación se tuvieron que dar instrucciones precisas de todo lo que se tenía que elaborar y aun así los resultados fueron inferiores que en la rotación. La secuencia didáctica no logro abarcar los cinco niveles que propone el modelo de Van Hiele, solo logramos avanzar hasta el nivel 1 fase 4, por lo que se rescata que es muy importante tener una buena organización en los contenidos, porque esto influirá en el aprendizaje de los alumnos. Por otro lado, es importante tener en cuenta que el hecho de utilizar las TIC no nos garantiza que se va a lograr un buen aprendizaje de los alumnos, porque estas solo deben utilizarse como herramientas que permiten llegar al conocimiento, mas no como únicos medios, tal como lo dice Giménez: La herramienta nunca debe ser una finalidad en sí misma, sino un medio que permita una mejor transmisión de contenidos matemáticos concretos, de forma que el aprendizaje que realice el alumnado resulte más significativo por su parte.[1].

V. Conclusiones

Cuando se realiza una secuencia didáctica, en este caso referente a la geometría, es importante que al momento de elaborarla, tomemos en cuenta las consideraciones que el modelo de Van Hiele propone, esto con la finalidad de que nuestros alumnos puedan tener el aprendizaje que se espera lograr en cada uno de los contenidos, ya que de otra manera y como lo observamos, los resultados pueden no ser del todo satisfactorios, porque al no tener un referente, nos enfrentamos a problemáticas, que no fueron consideradas en los análisis previos y además influyeron para que los alumnos no se apropiaran del conocimiento.Por otra parte, el no planificar tomando en cuenta las fases y niveles de Van Hiele, nos dimos cuenta que nuestra secuencia a pesar de que pensábamos que estaba bien organizada, no era así debido a que, al ubicarla en las fases y niveles, pudimos percatarnos que las actividades estaban revueltas, esta podría ser una buena razón para argumentar que esa teoría nos da un orden para lograr producir un aprendizaje graduado.

También dentro de este artículo mencionamos la importancia de las TIC dentro de un aula educativa, estamos de acuerdo en que estamos en una era en donde es sumamente importante utilizar este medio tecnológico, ya que las competencias que nos exige la sociedad requieren tener un amplio conocimiento acerca de esto, además de acuerdo a la experiencia obtenida en las prácticas educativas, identificamos la diferencia en cuanto a la motivación de los alumnos, trabajando en el aula de clase y en el aula digital.

El trabajar con las TIC es algo que les llama la atención y les ayuda a visualizar otros elementos matemáticos que con lápiz y papel son difíciles de observar.

Finalmente, es importante recalcar que cuando se quieran utilizar las TIC tenemos que considerar las situaciones que pueden influir en el desarrollo de la clase, ya que, si no se consideran previamente, sus posibles consecuencias pueden perjudicar completamente la realización de la secuencia didáctica. Otra cuestión importante es que no tenemos que olvidar que el utilizar este medio, no significa que tenemos que usarlo en su propia esencia, sino más bien como una herramienta que permita llegar hacia el conocimiento matemático de algún contenido.

REFERENCIAS

[1] Giménez Esteban, C.; GeoGebra: ¿un juguete para el profesorado o una herramienta para su alumnado?. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas,* No. 71, pp. 26-32 (2016)

[2] Maldonado Rodríguez, L.; Enseñanza de las simetrías con uso de geogebra según el modelo de Van Hiele. *Repositorio académico de la Universidad de Chile*. http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/133875 (2013). Accedido el día 1 de junio de 2016.

[3] Diario Oficial de la Federación; Ley General de Educación. *SEP*. https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/558c2c24-0b12-4676-ad90-8ab78086b184/ley_general_educacion.pdf. Accedido el día 3 de junio de 2016

[4] Sostenes González, H. S.; Los Software Educativos de Matemáticas, estudio de las isometrías en entornos dinámicos. *IX festival internacional de matemática,* pp. 1-10 (2014)

[5] Fouz, F. y De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. Un paseo por la geometría. *Centro virtual de divulgación de las matemáticas.* http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf. (2005). Accedido el día 1 de junio de 2016

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Un cuestionario de contenido "común" con temas de Círculos apoyados para su solución en el Software Geogebra.

Marleny Hernández Escobar[1]
[1]Escuela Normal Superior de México, Licenciatura en educación secundaria, Especialidad en matemáticas, Av. Manuel Salazar 201, colonia ExHacienda el Rosario, Azcapotzalco, Ciudad de México, México.
marlenylesly@hotmail.com

***Resumen*-En este estudio presenta un cuestionario diagnóstico de contenido "común", contenido definido [1] como el conocimiento de habilidades matemáticas utilizadas en otros escenarios además de la enseñanza, el cuestionario fue aplicado a futuros profesores del cuarto semestre de la Escuela Normal Superior de México (ENSM) con temas elementales de circunferencia (8 reactivos), utilizando Geogebra. Mostrando en el análisis de los resultados la estructura sustantiva y sintáctica que los futuros profesores poseen.**

***Palabras clave*-Contenido "Común", Geogebra, Futuros Profesores.**

***Abstract*- This study presents a diagnostic questionnaire for content "common", defined content according to [1] as the knowledge of math skills used in other environments in addition to the teaching, the questionnaire was applied to future teachers of the fourth semester of Escuela Normal Superior de Mexico (ENSM) with elementary issues of circumference (8 reagents), using Geogebra. Some results are showed and are based in the analysis of the results of the structure substantive and syntactic that future teachers possess.**

***Key words*- "Common" content, Geogebra, Future Teachers.**

I. INTRODUCCIÓN

La Escuela Normal Superior de México (ENSM) es la institución encargada de nutrir las escuelas secundarias de docentes, en el caso de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas el plan de estudios ubica, la asignatura de Figuras y cuerpos geométricos integrada por tres bloques en el cuarto semestre, para que en el quinto se revisen los contenidos de Medición y cálculo geométrico con cuatro bloques, los programas de estas asignaturas contienen un temario general para propiciar el desarrollo del trabajo autónomo y el intercambio de puntos de vista con los compañeros del grupo, además efectuar análisis permanentes que les posibiliten reflexionar acerca de su desempeño docente [2].

Según [1] la enseñanza implica analizar métodos y soluciones diferentes de las propias para comunicar de manera eficaz ideas matemáticas. Gran parte de los futuros profesores suelen tener limitantes para preparar y desarrollar mejor su práctica docente debido, en ocasiones, a los objetivos y tiempos destinados para cada tema.

Para llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas se requieren ciertos conocimientos entre ellos, 1) el conocimiento de contenidos y 2) el conocimiento didáctico de los contenidos. El primero entendido, según [1], como los hechos, conceptos y procedimientos matemáticos. El segundo, relativo a la enseñanza de los contenidos matemáticos, incluyendo el conocimiento de modos de representación más adecuados para facilitar su comprensión [3].

II. MARCO TEÓRICO

El Conocimiento Pedagógico del Contenido

A mediados de la década de 1980 [3] puso de relieve la complejidad de los conocimientos de los docentes mediante la identificación de categorías de conocimiento importantes para la enseñanza, estos aspectos fueron capturados en su término ampliamente utilizado, PCK, que incorpora una comprensión de cómo determinados temas y problemas están organizados, representados y adaptados a los diversos intereses y capacidades de los alumnos:

…las más poderosas formas de representación […], analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, o sea, las formas de representar y formular la materia para hacerla comprensible a otros […] además la comprensión de qué hace un aprendizaje de tópico específico fácil o difícil. [3]

El recorrido conceptual del PCK permite comprender la necesidad de revisar, analizar e investigar la formación docente desde esta categoría (el conocimiento de contenido).

El PCK representa:

La amalgama del contenido y la pedagogía dentro de una comprensión de cómo temas particulares, problemas o situaciones son organizadas, representadas,…adaptadas (…) para la enseñanza [3].

Esta afirmación supone poner especial atención a la forma de definir y comprender el contenido y la pedagogía y cómo estos se vinculan.

Esta relación implica que para poder ejercer la docencia, se requiere la transformación de lo comprendido en un cuerpo disciplinar ya que la capacidad de enseñabilidad de determinado contenido descansa, entre otros, en:

El conocimiento profundo, flexible y cualificado del contenido disciplinar, pero además, en la capacidad para

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

generar representaciones y reflexiones poderosas sobre ese conocimiento [3]

El estudio del PCK ofrece la oportunidad de entender cómo los y las docentes llegan a hacer enseñables los contenidos. Esta categoría de conocimiento le permite al docente tener la habilidad de convertir sus comprensiones acerca de un tema, en distintas estrategias de enseñanza que le faciliten el logro de los aprendizajes en sus estudiantes.

Al interior del desarrollo disciplinar, [3] indica que la comprensión del contenido requiere la discusión y comprensión de las estructuras de la disciplina, las cuales, además difieren según la procedencia del contenido temático.

III. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA (CME)

El Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) es una composición de contenido matemático y pedagogía; estos son dos conocimientos que un profesor en formación requiere para realizar sus prácticas docentes, el CME ha sido usado como herramienta analítica en la investigación sobre el conocimiento del profesor y para orientar la formación del futuro docente, se le considera un avance al trabajo de [3] a la vez que mantiene su esencia.

Situando el conocimiento del futuro docente para la enseñanza en el dominio matemático, [1] toman elementos que conforman el PCK y lo enfocan hacia contenidos matemáticos designándolo como Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME); observan que la enseñanza de las matemáticas implica diversas actividades centrales entre las cuales destacan: 1) Analizar métodos y soluciones diferentes de las propias y determinar si son adecuadas. 2) Desglosar ideas matemáticas, procedimientos y principios. 3) Escoger representaciones para comunicar de manera eficaz ideas matemáticas.

En los trabajos de [3] se considera la existencia de dos macrocomponentes dentro del PCK: el conocimiento de la materia que se va a explicar y el conocimiento didáctico del contenido, [4] mencionan que el conocimiento de contenido de la materia definido por [3] puede ser subdividido en:

Conocimiento de contenido común, el cual queda definido como el conocimiento de habilidades matemáticas utilizadas en otros escenarios además de la enseñanza, este conocimiento permite utilizar de manera correcta términos y notación matemática cuando se proporciona una explicación a los estudiantes, es el conocimiento de la materia y sus estructuras organizativas que va más allá de las características o conceptos de un dominio.

En esta categoría se trata de entender la estructura sustantiva y sintáctica de la materia o asignatura, estableciendo a la estructura sustantiva como la variedad de formas en las cuales los conceptos básicos y principios de la disciplina son organizados para incorporar sus hechos y la sintáctica referida a los caminos en los cuales la verdad o falsedad, validez o invalidez son establecidas.

[3] resalta que el maestro necesita entender no sólo lo que algo es; sino comprender más allá del porqué es así; concebir si su justificación puede ser válida o no, y bajo qué circunstancias.

Conocimiento de contenido especializado, se refiere a un conocimiento matemático que no se mezcla con conocimientos de estudiantes o de pedagogía lo cual lo hace distinto al PCK; es el conocimiento y las habilidades únicamente requeridas por los maestros en la realización de su trabajo; dentro de este dominio se encuentra el escoger representaciones para comunicar de manera eficaz ideas matemáticas.

Conocimiento del horizonte matemático, es la conciencia de como los tópicos matemáticos están relacionados con otros del currículo [4].

Y el conocimiento de contenido pedagógico se dividen en:

Conocimiento de contenido y de estudiantes, este representa una intersección entre el conocimiento de los estudiantes y el conocimiento matemático, aquí se ubican las concepciones erróneas de los estudiantes sobre determinados contenidos matemáticos.

Conocimiento de contenido y de enseñanza, aquí se involucra el conocimiento matemático con principios pedagógicos para la enseñanza de un tópico particular, dentro de este analizamos métodos y soluciones diferentes de las propias y determinamos si son adecuadas.

Conocimiento del contenido y el currículo, es el conocimiento del propio currículo de matemáticas que se propone y sugiere en cada curso.

Como consecuencia se deriva una prioridad para los programas de formación de profesores y su necesaria articulación a través de tareas que integren y transformen el conocimiento de manera coherente y sistemática, por lo tanto, el aprendizaje del profesor pasa por llegar a comprender la enseñanza de las matemáticas de una determinada manera, realizando las tareas, usando y justificando instrumentos que la articulen.

Para iniciar este estudio se consideró pertinente diseñar un cuestionario que permitiera obtener un perfil respecto al conocimiento de contenido común (de habilidades matemáticas utilizadas en otros escenarios además de la enseñanza) que los futuros profesores de matemáticas que cursan el cuarto semestre en la ENSM poseen sobre algunos temas básicos de geometría (triángulo y circunferencia) para que los resultados permitieran la elaboración de cuestionarios de contenido especializado para la enseñanza.

En este artículo se presenta el diseño de una primera versión del cuestionario así como su análisis para profundizar en la comprensión de las concepciones de los futuros

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

profesores de secundaria, considerando estos resultados como los primeros elementos para orientar un estudio dirigido al conocimiento especializado para la enseñanza.

Acerca de la geometría con el uso de Geogebra

En el ámbito internacional la [5], ha reconocido la importancia del uso de herramientas computacionales para que los estudiantes puedan comprender ideas matemáticas y resolver problemas, es por ello que la utilización y el desarrollo de programas de geometría dinámica como Cabri-Géometrè, The Geometer's Sketchpad y GeoGebra posibilitan al estudiante a crear construcciones geométricas en el ordenador sobre la pantalla, de forma que al darle movimiento se conserven las relaciones matemáticas entre los trazos de dicha construcción [6].

La [5] sugiere para la geometría analizar características y propiedades de las formas a través del desarrollo de argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas usando transformaciones para el análisis de situaciones matemáticas, todo ello a través de reconocer y usar conexiones entre las ideas matemáticas, creando representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas, con ello se pretende seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas.

IV. METODOLOGÍA

En este estudio se aplicó un cuestionario de contenido "común" a futuros profesores del cuarto semestre de la Escuela Normal Superior de México (ENSM) con temas elementales de circunferencia (8 reactivos) utilizando Geogebra.

Como antecedente para el diagnóstico de contenido común aplicado se consideró la naturaleza del conocimiento para la enseñanza desde la perspectiva de [3] quien introduce el "Conocimiento Pedagógico de Contenido" (PCK por sus siglas en inglés) debido al entendimiento de cómo los temas y problemas son adaptados a las diversas habilidades de los estudiantes para la instrucción. En los trabajos de [3] se considera la existencia de dos macrocomponentes dentro del PCK: el conocimiento de la materia que se va a explicar y el conocimiento didáctico del contenido.

Las actividades se centraron en los conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje considerando algunos temas de geometría propuestos en el currículo de educación normal relacionados con los programas de educación secundaria.

A continuación la tabla 1 muestra las actividades propuestas en el cuestionario:

Tabla 1. Actividades propuestas en el cuestionario.

HOJA DE TRABAJO (circunferencia)

Realiza las siguientes actividades utilizando Geogebra.

¿Se puede trazar la circunferencia que tiene centro en un punto dado y cuyo radio sea la distancia entre dos puntos dados? De ser posible trázala.

Coloca un punto O en la pantalla y traza varias circunferencias que pasen por ese punto y que tengan el mismo radio. ¿Qué figura forman los centros de dichas circunferencias? ¿Por qué?

Traza circunferencias que pasen por dos puntos A y B. ¿Cuántas circunferencias se pueden trazar por dichos puntos?

¿Dónde se ubican los centros de dichas circunferencias? Explica

¿Cuántas circunferencias por tres puntos dados, no colineales, puedes trazar? Justifica tu respuesta

Traza una circunferencia, una cuerda en ella y la perpendicular a dicha cuerda que pasa por el centro del círculo. ¿En qué punto de la cuerda interseca la perpendicular? Explica

Coloca otro punto sobre la circunferencia en uno de los dos arcos en los que quedó dividido el círculo por los extremos de la cuerda del ejercicio anterior y únelo con segmentos a los extremos de la cuerda. Mueve el punto sobre toda la circunferencia, ¿Qué puedes decir del ángulo que se forma con los segmentos que acabas de trazar, cuando lo desplazas por toda la circunferencia?

¿Qué pasa con los ángulos cuando la cuerda es diámetro? Justifica tu respuesta

En el interior de un jardín triangular, ¿se podrá construir una pista circular, la mayor posible? Anota el procedimiento que usarías.

Desplaza alguno de los vértices de tu triángulo. ¿Se mantiene la condición solicitada? Explica

En una excavación se encontró una pieza con la siguiente forma. Los arqueólogos dicen que se trata del plato (de forma circular) Uaxactún, de la cultura maya, ¿podrías ayudar a completar la pieza? En caso afirmativo describe el proceso de solución.

V. DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS

A continuación la tabla 2se presentan de forma general los resultados obtenidos.

Tabla 2. Actividades propuestas en el cuestionario.

PREGUNTA	CORRECTA	INCORRECTA	S/R
Trazo de circunferencia que tiene centro en un punto dado y cuyo radio sea la distancia entre dos puntos.	15		
Trazo de varias circunferencias que pasen por un punto y que tengan el mismo radio, figura formada por los centros.	4	10	

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Circunferencias que pasen por dos puntos A y B. ¿Cuántas circunferencias se pueden trazar por dichos puntos?	14	1	
3a. ¿Dónde se ubican los centros de dichas circunferencias?	11	4	
¿Cuántas circunferencias por tres puntos dados, no colineales, puedes trazar?	15		
Trazo de circunferencia, una cuerda en ella y la perpendicular a dicha cuerda que pasa por el centro del círculo. ¿En qué punto de la cuerda interseca la perpendicular?	13	2	
Coloca un punto en uno de los dos arcos en los que quedó dividido el círculo y únelo con segmentos a los extremos de la cuerda. ¿Qué puedes decir del ángulo que se forma con los segmentos que acabas de trazar, cuando lo desplazas por toda la circunferencia?	6	9	
6a. ¿Qué pasa con los ángulos cuando la cuerda es diámetro?	9	6	
En el interior de un jardín triangular, ¿se podrá construir una pista circular, la mayor posible?	14	1	
7a. Desplaza alguno de los vértices de tu triángulo. ¿Se mantiene la condición solicitada?	5	10	
Completar una pieza de forma circular.	7	4	

Se lleva a cabo solo la descripción de los ejercicios, 1, 3, 4, 5 y 7, dado que en esos ejercicios más del 60% contestó correctamente y lo consideramos contenido común

¿Se puede trazar la circunferencia que tiene centro en un punto dado y cuyo radio sea la distancia entre dos puntos dados? El 100% de los futuros profesores contestaron que sí, algunos ejemplos se presentan en la Figura 1, uno de ellos además argumentó que es uno de los postulados de Euclides.

Traza circunferencias que pasen por dos puntos A y B. ¿Cuántas circunferencias se pueden trazar por dichos puntos? El 93% de los futuros profesores mencionan que se pueden trazar una infinidad de circunferencias que pasen por dos puntos dados (Figura 2).

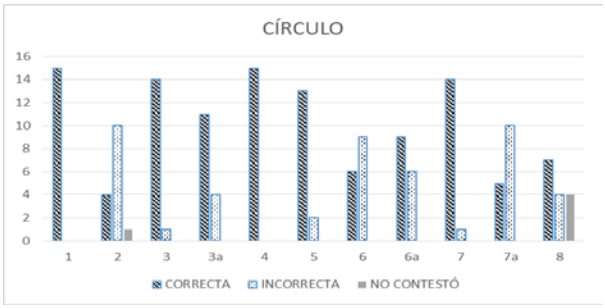


Fig. 1

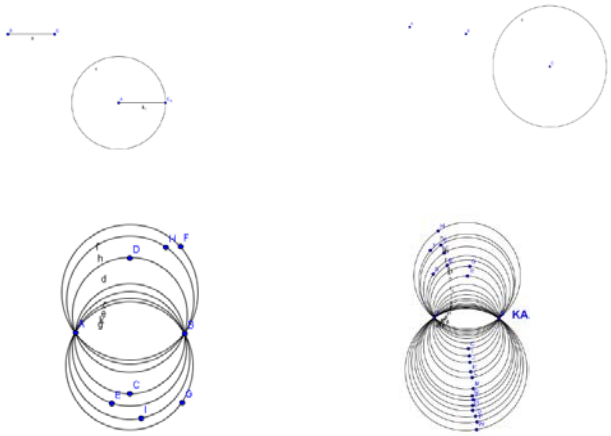


Figura 2. Trazo de circunferencias, dado un punto y una distancia y Figura Circunferencias que pasan por dos puntos A y B.

Algunos de los futuros profesores indican que los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos A y B dados, pertenecen a la mediatriz del segmento AB (Figura 3).

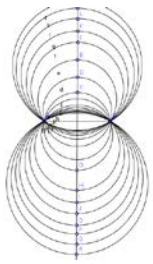


Figura 3. Mediatriz.

¿Cuántas circunferencias por tres puntos dados, no colineales, puedes trazar? Justifica tu respuesta.

El 100% de los futuros profesores contestaron que una, siendo en general su justificación que: tres puntos dados no pueden pertenecer al mismo tiempo a 2 o más circunferencias distintas. En su mayoría usan la construcción de circunferencia por tres puntos del programa (Figura 4).

Un futuro profesor utilizó las mediatrices de los segmentos para la construcción de la circunferencia por tres puntos (Figura 5).

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Traza una circunferencia, una cuerda en ella y la perpendicular a dicha cuerda que pasa por el centro del círculo. ¿En qué punto de la cuerda interseca la perpendicular? El 87% de futuros profesores indican que en el punto medio de la cuerda interseca la perpendicular

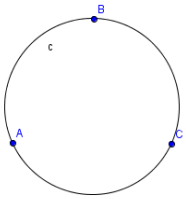


Figura 4. Circunferencia por tres puntos.

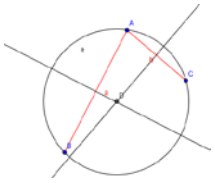


Figura 5. Circunferencia por tres puntos.

que pasa por el centro de la circunferencia (Figura 6); uno de ellos muestra que el centro de la circunferencia debe estar en la mediatriz del segmento que une a los puntos de la cuerda (Figura 7).

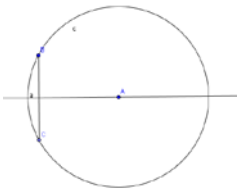


Figura 6. Perpendicular a una cuerda que pasa por el centro del círculo.

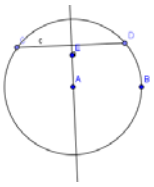


Figura 7. Mediatriz a la cuerda del círculo.

En el interior de un jardín triangular, ¿se podrá construir una pista circular, la mayor posible? El 93% de los futuros profesores mencionan que sí, además, el 71% de estos aluden al trazo de bisectrices y el radio para encontrar el centro de la circunferencia inscrita (Figura 8).

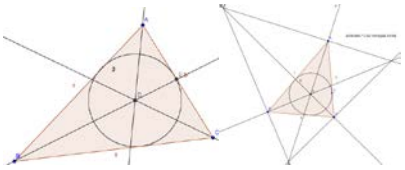


Figura 8. Circunferencia inscrita en un triángulo.

VI. CONCLUSIONES

Observamos con los resultados de las actividades del cuestionario de contenido común aplicado, las ideas planteadas por [4] ya que menciona que el conocimiento de contenido de la materia definido por [3] podía ser subdividido en el Conocimiento de Contenido Común.

Este conocimiento quedó definido como el conocimiento de habilidades matemáticas utilizadas en otros escenarios además de la enseñanza.

Las actividades aplicadas permitieron a los futuros profesores utilizar de manera correcta términos y notación matemática, es decir, lograron clasificar el conocimiento de la materia y sus estructuras organizativas y fueron más allá de las características o conceptos.

Dentro del Conocimiento de Contenido Común se observaron características de la estructura sustantiva y sintáctica del contenido de círculos en las respuestas de los futuros profesores ya que establecieron la estructura sustantiva como la variedad de formas en las cuales los conceptos básicos o los principios de la disciplina fueron organizados para incorporar sus hechos, y consideraron la estructura sintáctica cuando mostraron los caminos en los cuales la validez o invalidez eran establecidas.

Notamos que los futuros profesores tienen un conocimiento de contenido común el cual es considerado por [4] como aquel que cualquier profesional tiene, esto fue observado en este estudio en el tema de círculos, ahora para una posterior investigación se considerará este contenido común para establecer criterios que muestren las características de un Conocimiento Especializado en los futuros profesores.

REFERENCIAS

[1] Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics (pp. 83-104) Westport, CT: Ablex.

[2] Secretaría de educación Pública. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales. (1999). Programas y materiales de apoyo para el estudio del 4º semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria. Figuras y cuerpos geométricos. México: SEP

[3] Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher 15 (2), 4-14.

[4] Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

[5] National Council of teachers of Mathematics. (2003). Principles and standars for schools mathematics. Restan, VA: NCTM.

[6] Goldenberg, P. y Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Leher & D. Chazan (Eds.), Designing learning environments for developing undestanding of geometry and space (pp. 351-367). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Uso de pizarrón interactivo para la enseñanza de las matemáticas

Luis Cruz Kuri#, y Juan Ruiz Ramirez*.
#Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, México.
* Facultad de Economía, Universidad Veracruzana, Xalapa, Veracruz, México.
kruz2222@yahoo.com, jruiz@uv.mx

Resumen- **Los pizarrones interactivos, que incorporan tecnología informática, de alguna manera se parecen (excepto por un mayor tamaño) al monitor de una computadora. En inglés, se llaman smart boards; en castellano, se puede acuñar la terminología "pizarrón inteligente". Dichos artefactos se pueden usar de varias maneras: como pizarrón convencional, sobre el que se puede escribir usando un "lápiz"; como monitor, donde pueden aparecer materiales impresos o videos; con acceso a internet; con posibilidad de simulaciones y de utilización de programas de cómputo especializado, etc. Lo anterior, tan solo para mencionar algunos usos posibles [1]. En el presente trabajo, se describe la experiencia de varios años que uno de nosotros ha tenido en el aula con tales pizarrones para la enseñanza de las Matemáticas, y la Estadística. Asimismo, se desarrollan ideas sobre las ventajas que ofrecen, y el enorme potencial que tienen para propósitos de hacer más eficiente y ágil el proceso educativo.**
Palabras clave- **pizarrón interactivo, smart board**
Abstract- **Interactive whiteboards, which incorporate computer technology, somehow resemble (except for a larger size) computer monitor. In English, they are called smart boards; In Spanish, the terminology "smart board" can be coined. Such artifacts can be used in several ways: as a conventional blackboard, which can be written using a "pencil"; As a monitor, where printed materials or videos may appear; With internet access; With the possibility of simulations and the use of specialized computer programs, etc. The above, just to mention some possible uses [1]. In the present work, the experience of several years that one of us has had in the classroom with such blackboards for the teaching of Mathematics and Statistics is described. Likewise, ideas are developed about the advantages they offer, and the enormous potential they have for purposes of making the educational process more efficient and agile.**
Keywords- **Interactive whiteboards, smart board.**

I. Introducción

Desde hace seis años (desde 2010 a la fecha 2016) uno de los autores del presente trabajo (Cruz Kuri) ha tenido la oportunidad de impartir clases de Matemáticas y de Estadística en una institución de enseñanza superior (*El Colegio de Veracruz*) utilizando como apoyo pizarrones interactivos. Por otra parte, y desde hace muchos años, ambos autores asimismo han tenido la experiencia de dictar cátedra, también a nivel universitario, de cursos mediante la utilización de pizarrones convencionales (los que usan superficies de madera y gises, o, más recientemente, superficies de plástico y plumones de tinta susceptible de ser borrada).

Lo anterior ha permitido establecer contrastes entre ambas maneras de uso de instrumentos didácticos. Ambos autores han impartido cursos en las disciplinas de matemáticas y de estadística, tanto a nivel de licenciatura como a nivel de posgrado; cada experiencia educativa, teniendo grupos cuyos números fluctúan desde menos de 10 hasta cerca de 35 de alumnos.

Con el uso de los pizarrones convencionales, la presentación de los temas de un curso tiene una dinámica a la cual hay que ajustarse; por ejemplo, en la fase de resolución de ejercicios matemáticos de práctica, si se tienen que escribir los enunciados de cada problema, esto hace el proceso más lento pues, o bien el maestro escribe en el pizarrón, o bien dicta a los alumnos. Por supuesto que podrían referirse los alumnos a los materiales impresos seleccionados, aunque, frecuentemente, los alumnos no tienen a la mano dichos materiales. Lo mismo puede decirse para la utilización de tablas estadísticas, tales como las áreas bajo la curva de modelos probabilistas, por ejemplo, como los de las distribuciones, normal, t de Student, Ji-Cuadrado, etc. Aparte de que, acorde con los desarrollos informáticos, el uso de tales tablas se está haciendo obsoleto en virtud de que ya existen sitios accesibles por internet con los así llamados *calculadores de probabilidad* (acumulada o sin acumular), los cuales más rápidamente y con mayor precisión que las tablas proporcionan los resultados. Sin embargo, con el uso de pizarrones convencionales, no se tienen a la disposición dichos recursos en los salones usuales.

Podría argumentarse que se tiene la opción de utilizar laboratorios equipados con computadoras; sin embargo, esto sería fuera del salón de clase y, frecuentemente, sin la participación del maestro titular, dejando la responsabilidad de la conducción de las prácticas de laboratorio a un ayudante. Todo esto, en el supuesto de que los programas de estudios cuenten con presupuestos para la contratación de ayudantes y con espacios para laboratorios los cuáles además tengan los equipos de cómputo. Una opción más, podría ser la de encargar a los alumnos que por cuenta propia y con los recursos computacionales que dispongan resuelvan los ejercicios, fuera de las sesiones de clase. Esta manera deja al alumno sin el apoyo interactivo inmediato que el maestro podría proporcionar.

En contraste, según ha sido la experiencia de uno de nosotros, con el uso de un pizarrón interactivo, todas las

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

anteriores limitantes se superan, puesto que, todo lo que se pueda realizar con un pizarrón tradicional, también se puede hacer con un pizarrón interactivo y, con dicho artefacto informático se pueden desarrollar en el mismo salón ordinario de clases muchas otras actividades, tales como las presentar materiales impresos en el pizarrón y, además tener la posibilidad de "sobre-escribir" a mano, con el uso de un "lápiz" los detalles requeridos para resolver un ejercicio, así como anotar comentarios relevantes.

Con un pizarrón interactivo, se pueden hacer consultas "sobre la marcha" por internet para obtener apoyos computacionales, por ejemplo, como los de los sitios que ofrecen la utilización gratuita de calculadoras especializadas, tales como las que permiten resolver problemas de matemáticas en que se involucran modelos de probabilidad como los anteriormente señalados. Las consultas por internet, igualmente durante el transcurso de una clase, pueden ser de tipos menos especializados; por ejemplo, simplemente, la posibilidad de ver con todo detalle referencias bibliográficas.

Según la experiencia que se ha tenido con la utilización de pizarrones interactivos, su potencial no solo se limita a la docencia a nivel universitario, sino que sus alcances se extienden hasta los niveles de primaria e incluso de kindergarten. Así, a nivel de primaria o de secundaria, se tiene acceso vía internet a calculadoras especializadas para hacer operaciones aritméticas de sumas, substracciones, multiplicaciones y divisiones de fracciones (también conocidas como "quebrados"); por lo que concierne a aspectos muy elementales en la secundaria de temas de álgebra, tales como el de suma y resta de polinomios, se tienen representaciones gráficas, con mosaicos de distintos tamaños, formas y colores que pueden representar términos de los polinomios, etc.

En fin, como puede anticiparse, el uso de un pizarrón interactivo, tiene un enorme potencial para la consecución de recursos que apoyen en la enseñanza de las matemáticas e igualmente de la estadística, se insiste, en el salón de clases [2]. Por lo antes expuesto, se planteó el objetivo "Mostrar el uso de pizarrón interactivo para la enseñanza de las matemáticas". En la sección que sigue se desarrollan varios aspectos.

II. Ventajas con respecto a pizarrón convencional

Se pueden mencionar muchas ventajas que tiene el uso de un pizarrón interactivo *versus* un pizarrón analógico, ventajas que van desde las que tienen relación con aspectos conceptuales hasta las que se refieren a los aspectos prácticos.

Para empezar, un pizarrón interactivo facilita la generación de ideas y conceptos. El desarrollo en el salón de clase se hace más ágil. No es necesario llevar físicamente libros y revistas especializadas, ya que éstas se pueden descargar en forma digital mediante comandos hechos desde el propio pizarrón, tanto en archivos previamente preparados, como en archivos elaborados sobre la marcha.

Se pueden computacionalmente importar y exportar *cuadernos* (*notebooks*) los cuales consisten de una serie de varias o muchas *páginas digitales*. Hay que tomar en cuenta que un pizarrón interactivo establece canales de comunicación entre éste y la computadora que hace su soporte. Otra ventaja, del uso de un pizarrón interactivo se refiere a la posibilidad de guardar íntegramente la sesión de cada clase, permitiendo con esto que los alumnos puedan revisarla fuera del salón de clase, ya sea mediante una computadora personal, e incluso con un teléfono celular.

Se pueden, si así se decide crear documentos en formato pdf con tantas diapositivas como sean requeridas; lo mismo puede decirse para el manejo de presentaciones en power point. Se puede tener acceso a las así llamadas galerías, las cuáles consisten de una serie de carpetas con temas especializados que se enfoquen a la enseñanza en el salón de clase. Tales galerías pueden ser sobre una diversidad de temas: álgebra elemental, geometría, cálculo diferencial e integral, álgebra de matrices, matemáticas financieras, geometría tridimensional donde los objetos que se muestran en el pizarrón pueden rotarse o trasladarse en varias direcciones, permitiendo analizar a los objetos seleccionados desde distintas perspectivas.

Lo que se anota en forma manuscrita en el pizarrón, se puede convertir inmediatamente a texto en formato impreso, por ejemplo, hojas de cálculo tipo EXCEL, ocultar a los objetos, tales como si se estuvieran tapando con una cortina opaca, la cual también puede removerse, en el momento que se decida, para poder ver el objeto que por alguna razón didáctica se tapó inicialmente; este tipo de procedimiento también se puede adaptar fácilmente al caso de una sesión de ejercicios, en los cuáles, las respuestas que se les piden a los alumnos se ocultan, para más adelante, revelarlas.

La pantalla que aparece en un pizarrón interactivo se puede extender de manera indefinida tanto hacia abajo como hacia arriba, hacia la izquierda como hacia la derecha, haciendo virtualmente como si se tuviera un gran número de pantallas de pizarrones convencionales.

Otra ventaja, consiste en el armado de un análisis SWOT (fortalezas debilidades y amenazas, por sus siglas en inglés). Se pueden tener un conjunto de herramientas (*tool kit*) para actividades en clase (dichas herramientas pueden ser de tipo multimedia).

Dentro de los usos con los alumnos, se puede hacer que estos propongan actividades; que se realicen juegos interactivos; que los alumnos creen actividades interactivas; que los alumnos elaboren sus propias presentaciones, etc.

Se hace posible la utilización en clase de programas de

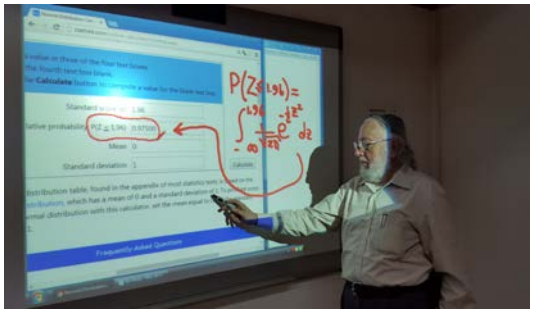


Fig. 1. Uno de los autores (Cruz Kuri) haciendo uso de las bondades de un pizarrón interactivo para la impartición de una clase de matemáticas

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

cómputo especializado, tales como: SPSS, *Mathematica*, tan solo para referirse a dos de ellos. Se puede trabajar con todas las opciones que ofrece EXCEL. Otras ventajas: se pueden tener sesiones de internet para visitar sitios web, tales como los de simulación de modelos matemáticos especializados, los cuales pueden facilitar el entendimiento de procesos numéricos, algebraicos o estadísticos.

III. Conclusiones

En Estados Unidos de Norteamérica, así como en Inglaterra, tan solo para mencionar a dos países, el uso de pizarrones interactivos como apoyo para la docencia es intensivo y estos artefactos informáticos se aprovechan desde los niveles más elementales, como pueden ser los de kindergarten y primaria [3], hasta los universitarios a nivel de licenciatura y posgrado.

Hasta donde tenemos conocimiento, el desarrollo y aplicación de esta tecnología informática es incipiente en nuestro país (México).

Nuestra experiencia en el uso de pizarrones interactivos como apoyo a la educación, en particular, en matemáticas, nos hace ver la gran ventaja que tales instrumentos ofrecen, mucho más allá del manejo de los pizarrones convencionales [4].

Debe quedar claro que, aunque nosotros hemos abordado su aplicabilidad a las matemáticas, lo mismo podría decirse de otras disciplinas, tales como la física, la química, la biología, la historia, etc., tan solo para mencionar algunas.

Así que, estamos convencidos de la necesidad de dar una amplia promoción a la utilización a la brevedad posible de esta herramienta informática.

Por supuesto, se requiere capacitar a los docentes sobre un manejo apropiado de tales instrumentos, a fin de no caer en una subutilización y, lo que es peor, en su abuso en temas frívolos e irrelevantes. La creatividad de los maestros, así como la de los alumnos, pueden llevar a grandes alturas a esta componente educativa.

Agradecimientos

Nuestro reconocimiento a *El Colegio de Veracruz*, institución donde, desde hace varios años, se tienen facilidades para uso de pizarrones interactivos. En particular al L.I. Pedro Urieta Aguilar del Departamento de Sistemas de Información por su apoyo en el uso del pizarrón.

Referencias

[1] BBC Active.(2010). What is an Interactive Whiteboard? Recuperado de: http://www.bbcactive.com/BBCActiveIdeasandResources/Whatisaninteractivewhiteboard.aspx.

[2] Drake, C. (2015). *The fantastic new ways to teach math that most schools aren't even using*. The Hechinger Report. Recuperado de: http://hechingerreport.org/the-fantastic-new-ways-to-teach-math-that-most-schools-arent-even-using/

[3] Eisenmann, D. (2010). Making Math Learning Come Alive: SMART Boards in the Immersion Classroom. Vol. 13, No. 3. Recuperado de: file:///F:/INTERACTIVE/smart-boards-and-math-teaching.pdf.

[4] Juersivich, N. (2009). Student Teachers' Use of Technology-Generated Representations: Exemplars and Rationales. Recuperado de: http://downloads.smarttech.com/media/research/international_research/usa/uva_report.pdf.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Las Matemáticas en la Educación en Línea.

Socorro Juárez Contreras*, Isaac Villavicencio Gómez*
*Universidad Digital del Estado de México, Escuela Normal Superior de México.
socorro.juarez@gmail.com, isaacvillavicenciogomez@gmail.com

***Resumen*- El artículo presenta un conjunto de aspectos que favorecen a la educación en línea, aspectos a considerar en la modalidad de educación, así como resaltar los restos y puntos de mejora. Derivado del boom presentado en la sociedad como una forma de educación y aprendizaje, en el cual las matemáticas se hacen presentes, cobra importancia conocer las formas a integrar para lograr la pertinencia y concreción de otorgar educación en línea. La educación matemática debe apoyarse de la pedagogía así como de las tecnologías de la información y la comunicación, que en este caso va inherente desde el momento que la plataforma de comunicación es parte, hasta los elementos primordiales de gestión y materiales de estudio. Los elementos integrados forman parte de una experiencia en el medio que recaba los puntos esenciales a considerar que resaltan las ventajas y oportunidades de la modalidad de educación en línea.**

***Palabras clave*- MOOC, E-Learning, D-Learning**

***Abstract*- The article presents a set of aspects that favor online education, aspects to consider in education mode and highlight the remains and areas for improvement. Derived from the boom presented in society as a form of education and learning, in which mathematics are present, it becomes important to know the ways to integrate to achieve relevance and specificity of providing online education. Mathematics education must be based pedagogy as well as information and communications technology, which in this case is inherent from the moment that the communication platform is a party to the key elements of management and study materials. Integrated elements are part of an experience in the middle that collects the essential points to consider highlighting the advantages and opportunities of online education mode.**

***Keywords*- MOOC, E-Learning, D-Learning**

I. Introducción

Iniciemos con los siguientes aspectos que hacen necesario que de inmediato nos adentremos en el tono educativo al manejo de tecnología educativa del tipo E-Learnig y la educación en línea. Es factible debido a las tendencias en el uso de herramientas tecnológicas (Clarenc, 2013)
De acuerdo con el INEGI, en 2012, las tendencias en el uso de herramientas tecnológicas son las siguientes:

I) 44.7 millones de personas usan una computadora.
II) 40.9 millones de personas tienen acceso a internet, es decir, un aumento del 447% respecto de 2002.
III) La conexión de banda ancha móvil pasó de 26% al 46%.
IV) Según NIC México (La autoridad que administra los dominios y subredes de la Internet en México):
V) Hay más de 600,000 dominios registrados con el sufijo .mx

Sumado con otras terminaciones de dominios, existen más de 1.1 millones de dominios de internet registrados en México. [1]
Las anteriores cifras significan la enorme área de oportunidad existente en el campo de la Educación a Distancia y el E-Learning.

Entonces lo que debe tener las plataformas para el manejo de gestión administrativa de tipo tecnológica y de gestión escolar, el manejo a profesores y alumnos, es la gestión de los contenidos para el manejo del área académica, y evidentemente las herramientas básicas de comunicación como son los foros, chat, pizarra, email, y elementos de comunicación en línea es muy deseable. Otro aspecto es el manejo de soporte técnico con el socio tecnológico seleccionado como con los usuarios en todos sus niveles. Algunas herramientas comerciales son: Blackboard, WebCT, OSMedia, Saba, eCollege, Fronter, SidWeb, e-ducativa y Catedr@, entre otras. Del tipo software libre tenemos: Chamilo, ATutor, Dokeos, Claroline, dotLRN, Moodle, Ganesha, ILIAS y Sakai.

En el caso de la nube contamos con: el desarrollo de MOOC (Cursos online abiertos y masivos), acrónimo en inglés para Massive Open Online Course. Lo más usado es.- Udacity, Coursera, Udemy, edX, Ecaths, Wiziq y Edmodo. Al momento de ver lo que es más conveniente implementar hay que ver opciones en el financiamiento, en le fin que se persigue, y considerar aspectos técnicos como es el Ancho de banda (BandWidth) y Sistema operativo. Considerar los recursos humanos, administrativos y tecnológicos es la recomendación al tomar una decisión pertinente y que ajuste a las necesidades. Con los materiales descritos y parte de las características, ahora es posible visualizar qué ocurre y debemos considerar para mantener la pertinencia y concreción de la educación en línea.

II. Desarrollo

La educación en línea y la matemática como parte de la formación de profesionistas, es en sí el tema de la artículo hoy presentado es un conjunto de elementos psicopedagógicos y técnicos que aportan valor al docente en línea cuando se refiere a la educación de alumnos que requieren de las matemáticas. Aquí partimos de diversas aristas que van a

[1] Clarenc, C.A. (2013) Analizamos 19 plataformas de E-Learnig. Investigación colaborativa sobre LMS. Recuperado el 03/07/2016 de: www.congresoelearning.org

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

conformar aspectos relevantes en cómo un docente debe preparar a los alumnos que estudian matemáticas en la parte formativa en su profesión.

Contexto.

La presente experiencia se ubica en una universidad en línea que oferta carreras en línea para ingeniería en sistemas, industrial, química; y para licenciaturas de tecnologías de la información, administradores, contadores, financieros, negocios, así como carreras similares. Siendo una universidad que brinda educación en lengua española, con presencia internacional a personas que manejen la lengua española. Por otra parte son expertos en formación de universitarios tanto socios nacionales como internacionales. Son pioneros e innovadores de la educación del formato en línea, y se han restructurado a lo largo de cuatro años de manera imperiosa, cambiante y con excelentes resultados.

1.- Tipo de alumnos.

Los alumnos que manejan en su mayoría un 90% son de edad avanzada, trabajan, y no contaron algunos con la oportunidad de estudiar, o bien truncaron estudios de licenciatura en el momento que contaban la edad inicial en que se cursan los estudios.

Hoy con más estabilidad, interés, y medios económicos logran pagar por recibir un servicio de educación, en que fortalezcan sus capacidades, y logren un mayor capital social.

Derivado de las características de los alumnos es necesario un modelo estructural basado en competencias y la andragogía.

2.- Tipo de carreras.

En este caso hay un conjunto de asignaturas que se debe ver en las carreras, por lo cual aperturamos hacía 2 rubros las matemáticas manejadas.-

I) Ingeniería de sistemas y similares
   a) Álgebra lineal
   b) Álgebra superior
   c) Cálculo diferencial e integral

II) Administradores, ingenieros industriales y similares.-
   1) Estadística para economía
   2) Estadística para las ciencias sociales
   3) Estadística para negocios
   4) Estadística y probabilidad
   5) Introducción a las matemáticas financieras
   6) Matemáticas financieras
   7) Matemáticas para los negocios
   8) Investigación de operaciones
   9)

3.- Necesidad de conocimientos y aprendizaje matemático.-

Los ingenieros en sistemas requieren de conocimientos del álgebra lineal ya que existen manejos de matrices y datos que suelen ser manipulados por trasformaciones diversas, y que al conocer los modelos y tendencias matemáticas al tema, hace que la manipulación de datos contenidas en bases de datos o programación, o bien herramientas de escritorio facilite el cálculo o análisis de datos e información de interés a las organizaciones.

Cuando existen datos consolidados es aún necesario saber del tema para facilitar métodos de trabajo en la inteligencia de negocios o bien procesos ordinarios mapeados y autorizados en las organizaciones.

El álgebra superior ofrece patrones de manejo de conjuntos de datos que demandan una observación y manipulación que ayude a la clasificación y manejo, en que los procesos naturales de productos o servicios sea sistematizada, y ante todo identificada para rasgos comunes que facilite un manejo de cómputo.

Dentro del cálculo diferencial e integral existen ecuaciones aplicables a casos en la física y la química, así como en el computo que ayudan a resolver situaciones importantes de mayor complejidad, sobre todo pensemos en servicios en agencias espaciales y de investigación científica como pueden ser en la astronomía, o bien otros casos de más de impacto en la ingeniería y finanzas.

Cuando hablamos de áreas económico administrativas, la necesidad se percibe dentro de las opciones relacionadas a la tecnología de la información y comunicación, que tiene un trasfondo binario, y de métodos basados en ciencia. Por otra parte la necesidad propia de contar, cuantificar, evaluar, controlar e identificar indicadores en diversos rubros de los procesos de una organización o empresa. En esencia la parte financiera es una de las sustantivas. En otra visión las áreas estadísticas y de probabilidad, o de mejora en procesos de eficiencia en distribución producción cuando las matemáticas ya no ayudan en aportar métodos tradicionales y hay que hacer uso de la optimización o investigación de operaciones.

Es por todos reconocido que debemos contar si queremos controlar, mejorar, y saber con más precisión los recursos que se tienen y las ganancias o valor competitivo por un servicio o venta. Entender este contexto de necesidades de los alumnos futuros profesionistas es importante para que identifiquen el por qué reciben una educación con base en las matemáticas de determinado tipo. Así un pequeño en primaria y secundaria identifica la necesidad de sumar, restar, multiplicar y dividir, para que aplique la aritmética cuando compra, cambia, compra o vende algo de interés. O simplemente para saber una cantidad de interés ante un conjunto de materiales.

4.- Formación del docente.-

El profesor puede ser un profesionista que estudio las matemáticas mencionadas, por lo cual puede ser un matemático, un ingeniero, un administrador etc. Alguien que haya pasado por una formación que considera las asignaturas planteadas. En ocasiones el perfil del docente puede considerar especialistas a nivel maestría y doctorado. Es deseable siempre que cuente con la formación psicopedagógica, pero en ocasiones la sensibilidad y experiencia, e interés o habilidad, son factores que les caracterizan. Más allá de lo conocido el profesor requiere contar con una formación en TIC, para que utilice los medios de la tecnología actual y la plataforma de comunicación en que se darán las clases en línea, asesoría, y geste el proceso de enseñanza aprendizaje, como de evaluación.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

5.- Formas de dar clase.-

Se considera que hay profesores tradicionales y reactivos que creen que no deben actuar salvo evaluar. Los profesores proactivos que buscan siempre como mejorar el proceso y lograr atraer al alumno. Los profesores intermedios que saben que deben reconocer y aplicar medios y formas que ayuden al proceso de aprendizaje de las matemáticas. Y llevan una forma tradicional y a la vez cambiante, sin enfatizar hacia ninguno más bien es una mezcla. Un sugerencia que puede hacer favorable la escuela en línea es humanizar un poco la interacción con el alumno mediante breves capsulas en línea en que dialogue el alumno y profesor, y se diriman las dudas sustantivas que hacen que un tema no se comprenda y a la vez vea el alumno la posibilidad de estar con alguien en la distancia que está al pendiente del proceso de aprendizaje. Para lo que se recomienda usar medios de software, como WizIQ, Webex, Webinar, etc. Preferentemente de forma síncrona, en tiempo real. Otros medios en que el profesor da clases, es por medio de foros, chats, videos, cuestionarios y ejercicios de intercambio, blogs, publicaciones de wikis u otros escritos en la Web, que son parte de la sociedad del conocimiento. Existen también dependiendo el caso herramientas de apoyo para calcular, ejercitar y graficar.

6.- Elementos de apoyo para mejorar la práctica docente.-

Dentro de las competencias se caracteriza el manejo de los 3 saberes, el manejo de una motivación, y formación integral. Así dentro del alcance del profesor es necesario que sea motivador, que se motive, y que mantenga ese enfoque total dentro de su actuar en clase y atención a sus alumnos. La motivación es el principal ingrediente para que ante todo impulse y contagie un trabajo abstracto, en que se vea interés, alegría, entusiasmo, comprensión, y una forma fácil de explicar paso a paso los temas de clase. Se sugiere un dialogo inicial de presentación e intereses, en que se identifique dónde vive el alumno, gustos, preferencias, actividades que realiza. Se debe integrar elementos de figura, frases, colores, que contengan relación al tema, así como una dosis motivacional sea ejemplo las frases de los lideres, o bien frases de expertos en el tema. La integración de materiales que desglosen a detalle o expliquen de otra forma el tema de clase es la labor del profesor para hacer llegar al alumno un tema matemático. Dentro de los materiales de estudios se sugiere manejo de TIP's que ayuden al alumno a conocer cómo son las preguntas, y temas a desarrollar en las tareas. Se sugieren formularios y extensos ejemplos que diriman inquietudes de cómo resolver ecuaciones, aplicar métodos paso a paso, o bien realizar cálculos especiales al aplicar problemas prácticos.

En ocasiones los alumnos no interactúan pero si mantiene un hacer permanente y persistente, entonces al ver materiales interesantes breves y prácticos se interesan y revisan lo cual es una especie de gancho que ayuda al aprendizaje y entendimiento de temas. No se puede dejar de lado el repetir en ocasiones un tema, ya que es una forma de verlo.

Dentro de la parte de cierre de clase, es muy relevante ver en que utilizará el alumno los temas de matemáticas que son complicados, y es muy importante que explique la razón por la cual está el alumno aprendiendo y estudiando el tema, que en muchas ocasiones es introductorio y conceptual, luego de su aplicación, y al final simplemente entender cuándo aplicaré tales conocimientos.

En la evaluación es muy importante retroalimentar al alumno de forma individual, y explicar que debe mejorar en los exámenes, o bien en los trabajos y tareas desarrollados.
Es verdaderamente intenso y de tiempo, atender alumnos en línea, ya que es prescindible un paso a paso en cada actividad, sólo de esa forma se concibe aspectos de mejora que tenga el alumno al alcance y mejore incluso vicios que se tienen de jóvenes en la educación básica.

La retroalimentación el hablar en positivo, en un sentido de sugerencia, recomendaciones, puntos de mejora, opciones extra de complemento y apoyo, así como sugerencias, sobre todo sean realizadas de forma personalizada, surten un efecto gratificante que ayuda al alumno a revisar, verificar y mantenerse adelante con las actividades. Es un reto que asume el alumno y estará en la mayoría de los casos pendiente de mejorar y mantenerse firme en el estudio.

Se sugiere saludar, resaltar lo mejor de su avance, describir puntos de mejora o dicho de otra forma las fallas y defectos de las tareas o exámenes, para luego brindar materiales de apoyo concretos a los casos en que fallo el alumno. Siempre integrar imágenes y frases, es un elemento enriquecedor que ayuda al alumno a comprender el tema. Si el alumno se equivoca o no, es necesario resaltar los temas relevantes, y emitir recomendaciones a fortalecer por parte del alumno y que el observe y aplique.

A un alumno en línea como al presencial es vital la invitación a mantener una asistencia al curso, la mínima que deje ver el interés del alumno, y el tiempo mínimo a dedicar.[1]

7.- Retos.-

Mantener un alumno en la escuela en línea, mediante la retención y seguimiento en equipo, del profesor, tutor, y atrás áreas académicas, que realizan materiales, formatos, medios de aprendizaje atractivos y atrayentes que facilitan el aprendizaje y comprensión de los temas.

Mantener una aprobación del 80 al 95%, reto totalmente regular ya que en promedio se tiene un 75 a 80%.

Lo que hace la diferencia es la forma de trabajar con el grupo, mediante algunas estrategias, y un puntual y concreto seguimiento, permanente y continuo que no rebase las 10 hrs. de respuesta máximo 24 hrs.

Otro punto a ver como un reto es que academias y docentes usen efectivamente la Web 2.0 es un tema que en la actualidad tiene impacto en la educación, ya que nos ofrece ahora herramientas colaborativas que se trabajan en línea con demás interesados, pero existen diversidades de elementos a utilizar, como videos, vínculos, blog's, software ofimático o de diseño de líneas del tiempo, imágenes, mapas mentales etc. Eso favorece la educación debido a que hay más elementos que nos hace estar cercanos y colaborar en una investigación, en un foro para tema de aprendizaje, en un vídeo de interés.

Entonces en la educación en línea tiene elementos de sobra para propiciar competencias docentes con el ingrediente

[1] Juárez C., S. (2016) Experiencia docente en línea. Gutiérrez & Juárez.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

transversal de las TIC, ya que favorece y refuerza la enseñanza aprendizaje. Veamos mediante la figura 1 Web 2.0, los elementos que ofrece la web 2.0. Tenemos herramientas de oficina, multimedia, marcadores, para trabajo en el aula, para aplicativos de lectores, wikis y blogs.

Figura 1. Web 2.0 (Fuente de consulta de: http://goo.gl/wU6ILq)

8.- Puntos de mejora y recomendaciones.-

I) Mejorar la forma en que se presenta los materiales de estudio.
II) Integrar ejercicios en línea.
III) Mantener la motivación, punto eje de ayuda para mantener la relación con el alumno.
IV) Mantener cautivo al profesor por tiempos más continuos y en el que sea participante activo.
V) Mantener cambios permanentes a los instrumentos de exámenes, tareas y materiales de estudio.

9.- Tutores y áreas académicas.

Sí se observa ya existe una figura de tutor incluso en las escuelas presenciales, y este tutor es una figura realmente de apoyo, cuando es un asesor que motiva y atrae al alumno a mantenerse y seguir sus estudios, sin importar las dificultades.

Generalmente suele ser el tutor un intermediario entre el profesor y alumno, o bien quién motiva y explica al alumno la forma de trabajo en la escuela en línea, en si el manejo de la plataforma y las formas de evaluación que se manejan.

La figura de un académico o coordinador es vital para que intervenga en caso de observar complicaciones en materiales de estudio, o procesos de educación con el profesor, o exámenes, o bien algo que no esté facilitando al alumno el logro de estudio de las asignaturas. El profesor es la figura que lleva le control y evalúa al alumno, determina prórrogas o bien brinda explicaciones al detalle de los temas, y atiende las dudas existentes, sobre todo de los temas de la asignatura. El trio de personas que actúan con el alumno, favorece entre diferentes medios y formas atraer al alumno para que concrete su formación.

10.- Tendencias en el corto mediano y largo plazo.-

Una tendencia es que se inhiba la presencia del profesor, de pronto pensar que sería todo sistematizado, es un punto creíble, pero la presencia del ser humano es vital para motivar.Es importante que se considere diferentes formas de trabajo, sea que se evalué con exámenes, ejercicios, tareas, trabajos de investigación, por experiencia, o casos especiales que reflejan el trabajo de la matemática. El cambio y manejo de plataformas, en su diseño y manejo, es un punto variante continuamente pero ¿es del todo necesario? Es posible ya que hace dinamismos en el quehacer en línea.Otro es la forma de presentar los materiales de estudio, o los mismos materiales de estudio, deben varear para mantener un cambio y buscar puntos de apoyo que mejoren e impacten el aprendizaje del alumno. Considerar que es mejor un trabajo continuo de ejercicios y lecturas, que el de exámenes. Facilitar el acceso a la plataforma, tan natural como un juego o el correo electrónico que se sienta a la mano. La figura 2 muestra aspectos a considerar para integrar una dinámica de grupo en línea en que el docente se reinvente a la par del apoyo académico, ya que la tendencia de los foros no está del todo aceptada por los alumnos en temas de matemáticas, aunque se cuenta con una experiencia favorable en ocasiones, se optó por inhibir los foros de comunicación colaborativa. Pero debe de realizarse un foro en la parte del cierre de las clases, ya que de esa forma puede de manera grupal concientizar la aplicación de lo aprendido.

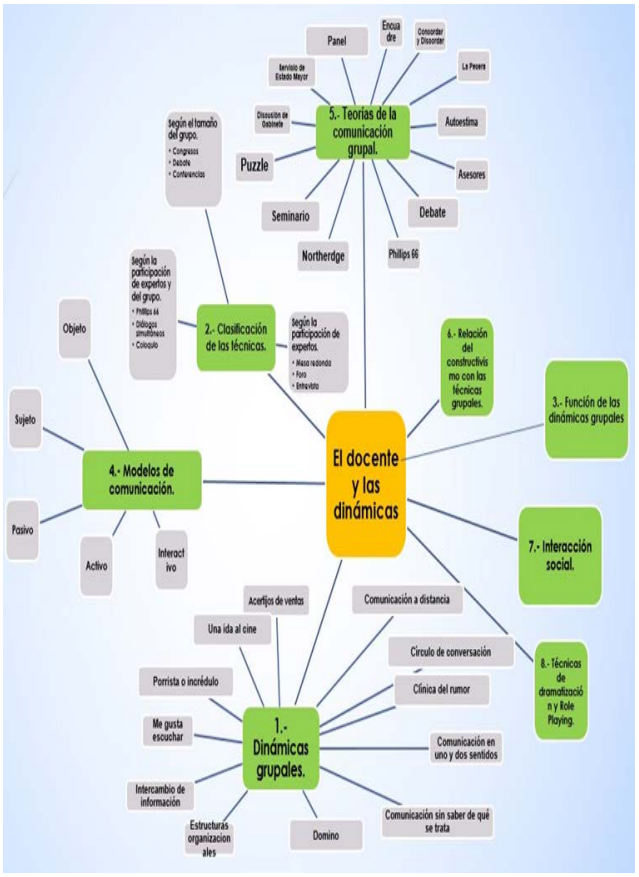


Figura 2. Mapa mental de las técnicas grupales. (Fuente propia http://goo.gl/oB8yM0)[1]

[1] Con apoyo de materiales de:
ETAC (2016) Dinámica y conducción de grupos en el aula..

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

III. Conclusiones

La relevancia del artículo radica en resaltar aspectos que dieron éxito en educación en línea, ya que existen muchas opciones en línea pero no son de todo pertinentes, generan deserción, desinterés, no impulsan a que el alumno logre verdaderamente una forma de aprendizaje que facilite su formación y concreción profesional.

Tal vez sea un tanto complicada la educación en línea ya que demanda la creación de los materiales de estudio, muy concretos y puntuales, y justo el punto de oportunidad que siempre estará latente, ya que en la diversidad permite que se integren mejoras, y se generen de continuo materiales que verdaderamente sean de impacto al alumno.

Se integra a un autor que me ha dado aportes valiosos en mi función docente. Tobón (2003) hace mención de algunos puntos deseables en la educación que apoya ciertas estrategias didácticas (Rodríguez, 2007) de éste corte dinámico por el cual debemos utilizarlas y es lo siguiente.-

- Desarrollo del pensamiento crítico y creativo
- Fomento de la responsabilidad de los estudiantes frente a su formación
- Capacitación de los estudiantes para buscar, organizar, crear y aplicar la información
- Promoción del aprendizaje cooperativo mediante técnicas y actividades que permitan realizar labores en grupo con distribución de tareas, apoyo mutuo, complementación, etc.
- Autorreflexión sobre el aprendizaje en torno al qué; por qué, para qué, cómo, dónde, cuándo y con qué.
- Comprensión de la realidad personal, social y ambiental, de sus problemas y soluciones. (Rodríguez, 2007)

La actividad me deja claro que el ser humano es social, que mediante la sociabilidad ha logrado muchos avances, y mejoras en todos los sentidos de la vida. Entonces educar con ese sentido es parte de la esencia social de todo ser humano, y facilitaré contundentemente en la formación de un individuo. Resta un manejo de lo cognitivo y estructurante buscando la forma de mayor impacto en el aprendizaje. Por lo que sugiero que la educación en línea sea interactuante con el profesor y el alumno, ya que lograría mayor impacto, se socializaría, y mantendría un punto de apoyo que favorezca cierta sociabilidad en ro de un aprendizaje significativo que logre insertar en el alumno el conocimiento básico para que contienda en la sociedad.

Y se sostiene la postura con la cita de Freire, excelente y pertinente cita, y que está contenida en el libro de (Tovar, 2001, pág. 32),

> *"… una educación … no tiene justificación ni razón de ser si no está orientada hacia la participación del pueblo a través de la organización y de la acción política, en todos los procesos de cambios sociales. Podrán discutirse técnicas pedagógicas, metodologías, programas, ciclos, necesidades, prioridades, etapas, etc., conforme a las realidades de cada país y de cada región así como también de cada grupo social. Pero hay algo que es difícil poner en tela de juicio: la necesidad de educación orientada hacia la toma de conciencia… que conduzca a la acción para la liberación"*

La cita denota la necesidad de una sociabilidad de las personas, sin importar el enfoque político, ni la forma educativa, y relevante es que el usar estas técnicas puede en cierta forma aportar valor al manejo de toma de decisiones, el crear conciencia en los individuos algo deseable, y permita al ser humano tener una libertad particular en su medio social. El uso de educación en línea es inevitable hoy por hoy, es parte fundamental de algunas organizaciones, y es de gran apoyo a la capacitación y actualización del personal o bien de los actores educativos sean administrativos, alumnos o docentes.

Tiene ventajas como lo son el uso de medios novedosos si así son diseñados, como la facilidad y alcance en las ciudades. Una desventaja es que en zonas rurales o sociedades con carencias básicas, será más complejo insertar estas tecnologías. Resta propagarlas por la descripción y materiales de apoyo al alcance.

Obliga a mantener actores nuevos especialidades en el manejo tecnológico de tres capas, de lenguajes, de contenidos de bases de datos, de estrategas con un enfoque hacía la educación en línea.

Es una desventaja el posible punto de aislar a las personas y no tenga una interacción cara a cara con seres humanos en algunos casos, y eso vuelve a las personas menos tolerantes y sociables.

Es necesario impulsar las matemáticas, ya que están presentes en aspectos de ciencia y tecnología de vanguardia, tan sólo en la computación cuántica, anuncia el cambio de la forma de mantener los métodos de las TIC, y sobre el manejo de la información cuántica, las matemáticas son la base en muchos puntos, por lo tanto es vital abundar en las mejoras de la educación matemática, de momento aquí acotado a la educación en línea.

Agradecimientos

Agradezco al Gobierno del Estado de México por la oportunidad que brinda para cursar la maestría en docencia. Agradezco la Escuela Normal Superior de México, por las facilidades otorgadas para la presentación del artículo y la planeación del Congreso.

Referencias

[1] Cabero J. (2006) Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento Vol. 3 - N.º 1 / Abril. Recuperado el 03/07/2016 de: www.uoc.edu/rusc
[2] Clarenc, C. A. (2013) Analizamos 19 plataformas de E-Learnig. Investigación colaborativa sobre LMS. Recuperado el 03/07/2016 de: www.congresoelearning.org
[3] ETAC (2016) Dinámica y conducción de grupos en el aula.
[4] Juárez C., S. (2016) Experiencia docente en línea. Gutiérrez & Juárez.
[5] Rodríguez Cruz R. (2007) Compendio de estrategias bajo el enfoque por competencias. Instituto Tecnológico de Sonora. México.
[6] Tovar S., A. (2001) El constructivismo en el proceso enseñanza aprendizaje. Instituto Politécnico Nacional. México.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Diseño de un sistema neurodifuso de conversión PWM a motoreductor CD: Modelado y aplicación

Marcos Fajardo Rendón*, Francisco Guillermo Herrera Armendia*, Isaac Villavicencio Gómez*, María de Jesús Sentiés Nacaspac*
*Departamento de Matemáticas. Escuela Normal Superior de México. Cuerpo Académico "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica". Av. Manuel Salazar No. 201. Colonia Ex Hacienda Del Rosario. Ciudad de México.
fajardoensm@gmail.com

***Resumen*- El presente proyecto propone el diseño y modelado de un sistema de conversión de una señal PWM a digital para ser usado en motoreductores de C.D. sin importar torque o voltaje mediante un sistema neurodifuso que compara y controla la posición actual del motoreductor respecto a la deseada hasta colocarse en ella siendo embebido en un microcontrolador de señales digitales.**
***Palabras Clave*- Modelado, HID, PWM, sistemas neurodifusos.**
***Abstract*- This paper describes the design and modeling of a PWM digital signal converter for use in D.C. motors regardless of torque or voltage through a neurofuzzy system comparing the current position and controls the gearmotor regarding desired to stand in it being embedded in a microcontroller digital signal.**
***Key Words*- Modeling, HID, PWM, neurofuzzy systems.**

I. Introducción

Es común que sistemas electromecánicos de corriente directa de configuración limitada o cerrada en actualizaciones o proyectos específicos requieran de un control preciso de sus motores o actuadores, refinamiento de movimientos en manipuladores para lograr configuraciones con mayor densidad de pasos o ser actualizados a aplicaciones de lazo cerrado y que al no contar con un sistema de control preciso se requiere de su sustitución parcial o total, generando un rediseño de espacio, carga de la maquinaria, daños en vibración y altos costos de adquisición y actualización.
El presente prototipo propone el diseño y construcción de un sistema de control total formado por un software de control mediante una GUI autoejecutable basada en sliders, un sistema de servocontrol USB-HID y una etapa de control por PWM embebida a un motoreductor de corriente directa, centrándose sólo el modelado en la última etapa.

II. GUI

Debido a que el sistema de convertidor de motoreductor a servomotor requiere de las características de calibración, control y reprogramación se adaptó una GUI (graphical user interface) desarrollada originalmente como software host para 16 servomotores simultáneos basado en sliders para que el usuario pudiera manipularla intuitivamente, mismo que permite el guardado de las secuencias de los servomecanismos a modo de "aprendizaje" para trabajar en modo autónomo al ser almacenadas las secuencias la memoria del microcontrolador sin necesidad del software [1].

El software contiene la autodetección plug & play de la tarjeta USB al ser de la familia HID desarrollado en Visual C# .NET y exactitudes de rutina en modo esclavo heredadas de las APIS e Hypertreading del sistema operativo.
Los scrollbars utilizan interpolación de Lagrange para calcular el equivalente proporcional del valor del pulso PWM, así mismo se pueden desplazar varios en conjunto o su proporcional entre ellos mediante el anclamiento de uno o más.
La GUI permite modificar el timming para poder experimentar y realizar pruebas del sistema en tiempo real.
El sistema detecta la conexión de la GUI con el hardware, liberándolo automáticamente en caso contrario para conmutar a modo autónomo para ejecutar infinitamente las rutinas.
Si no se requiere la calibración, control por PC o programación de rutinas el sistema puede omitir el uso de la GUI y simplemente acoplarse a un sistema generador de PWM de lazo abierto como pueden un 555 con LM324, RC o PIC, como se describe en la figura 1.

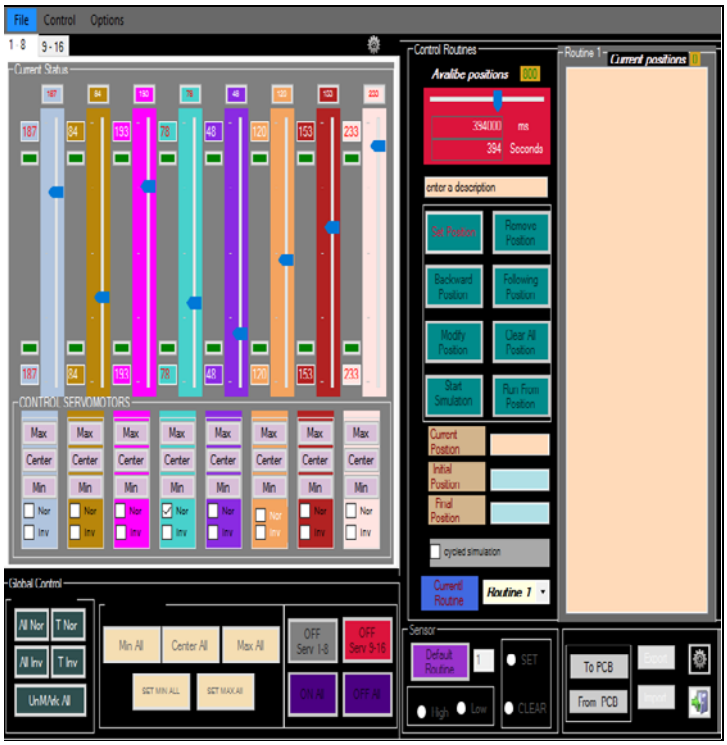


Fig. 1. GUI

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

III. Hardware y Firmware de servocontrol

Los servomotores requieren de una alimentación standard TTL de 5V utilizando como señal de control un PWM (pulse-width modulation) con fo= 50 Hz y un 1/fo=0.02 s, que brinda un ciclo de trabajo activo wc=20 ms logrando una variación porcentual del periodo alto ч={6-15} comprendida en un espectro i={0.5-2.5}.

La tecnología USB contiene una definición de clase denominada HID (human interface device) que permite identificar automáticamente un hardware al conectarse en el sistema, nulificando el proceso de instalación de drivers al unificar los protocolos por su naturaleza de autodescripción en su definición nativa, contar con sistemas de autoasociación dinámica de comunicación bidireccional y una sola librería embebida en el sistema operativo.

Se rediseñó un firmware diseñado para el manejo en tiempo real desde una computadora 30 servomotores que permite el guardado en la memoria Flash del PIC de cada posición mediante un arreglo de datos stack brindando la modalidad de ser desconectado de la PC para alimentarse independientemente por un voltaje externo logrando independencia y autonomía del sistema mecatrónico para repetir secuencias [1].

Se estableció en el firmware un Polling de 1 ms USB 2.0, los V+ y V- , un buffer de 64 bits para manejar los datos de buffering y librerías de descripción de driver USB-HID.

Se utilizaron 5 timers de 32 bits que diferencian las posiciones alta y baja entre los intervalos de 2.5 milisegundos del PWM de onda cuadrada, ejecutándose recursivamente en el servomotor y es calculado mediante su equivalencia en ticks de reloj dada por PWM=ms+i(120); i=i+1 dando el número total de ticks necesarias para un pulso de 1.5 ms y para su lectura secuencial logrando un complemento mediante i=i-1 al cálculo del pulso, actualizando el valor de cada timer.

Si el sistema se encuentra haciendo rutinas y se desconecta de la PC, este es detenido mediante una función encargada.

La tarjeta servocontroladora USB-HID está soportada en un PIC de la familia Microchip rediseñada para el PIC 18F4550 utilizando sus pines de comunicación USB específicos V+ y V- utilizando como alimentación el mismo voltaje USB en un plug tipo B, pudiéndose alimentar a un voltaje externo para aplicaciones de potencia con reconocimiento automático mediante el circuito de conmutación Mosfet-P NDS352P; el cual cuenta con una max drain de ± 0.85 A, sin necesidad de tener que jumpear o switchear el dispositivo para poder ser transformado a modo autónomo mediante una lectura del PIC, con lo que se estabilizan las salidas PWM; mismas que cuentan con una resistencia de 220 Ω [1] como se describe en la figura 2.

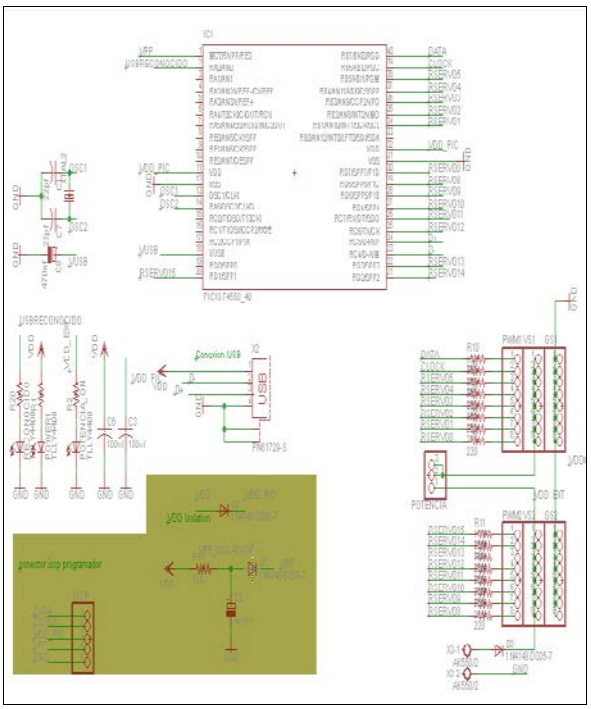


Fig. 2 Tarjeta controladora de servomotores USB-HID con PIC 18F4550

IV. Hardware de conversión CD a PWM

El Hardware del sistema de conversión consiste en una tarjeta embebida a un motoreductor de C.D. mediante un potenciómetro y un DSPIC (digital signal programable integrated circuit) 33FJ16GP102 de la familia Microchip de 16 bits, 1 módulo convertidor ADC de 6 canales de 10 bits de resolución a 1.1 Msps y 3 módulos de comparación.
Una vez digitalizada la señal analógica del potenciómetro proveniente del canal 1 de ADC, esta es comparada con respecto al PWM del RA0.

El módulo de comparación está integrado y procesada por los módulos PID y neurodifuso para enviar una señal digital hacía la etapa de potencia formada por un puente H para poder suministrar la corriente requerida por el motor, para el experimento se trabajó con un L293D pudiendo ser sustituido por el requerido según la del motor, como se describe en la figura 3.

Un motor eléctrico es un dispositivo electromecánico que convierte energía eléctrica pudiendo ser de C.A. o C.D. en mecánica, a este se le puede acoplar un sistema denominado reductor de rpms que permite mediante un sistema de engranaje incrementar su torque.
El sistema es de lazo cerrado y busca que los datos generados por el sistema difuso sean evaluados por una simple neurona tri-nivel, el resultado es comparado con el PID respecto al valor setpoint dinámico de lazo cerrado por un potenciómetro acoplado al motor en relación 1:1 para la lograr una salida dinámica.

El motor puede ser modelado como un sistema en donde la entrada está acoplada al voltaje (V) con su respectiva tensión y cuyas variables a medir son:
Velocidad angular del eje= (ω) rad/s

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Ángulo del eje= (θ) rad. (1)
En donde:
V_a = Voltaje inducido (V)
R_a = Resistencia de la armadura (Ω)
L_a = Inductancia de la bobina (H)
i_a = Corriente Inducida (A)
MT1(E_b)= Voltaje inducido por FEM del motor(V)
T = Torque (Nm)
θ = posición angular del eje de MT1 (rad)

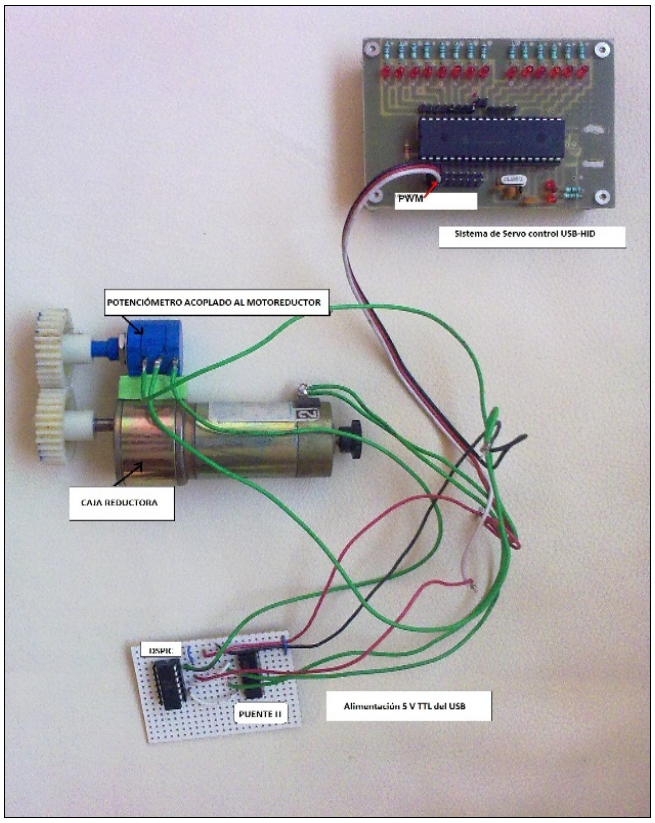


Fig. 3. Tarjeta controladora de servomotores con el prototipo DSPIC convertidora de PWM a C.D. acoplada al motor con potenciómetro.

El circuito del modelo anterior puede ser simulado en Livewire como se muestra en la figura 4.

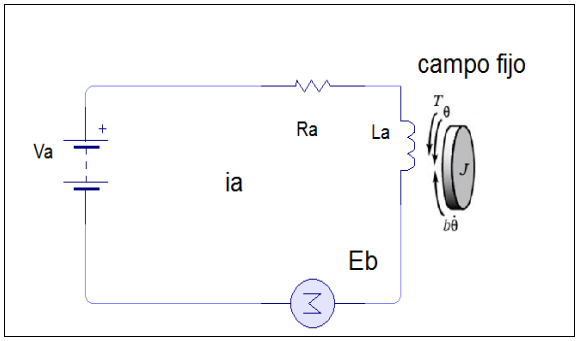


Fig 4. Simulación en Livewire del motor de C.D.

Cuando *Va* es aplicado al motor, este se ajusta sin modificar el voltaje aplicado al campo en donde V y el par motor se relacionan como:

$$Va(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} \quad (2)$$

Así mismo el torque del motor *T* se encuentra relacionado con la corriente *i*, mediante la constante *K* siendo:
$T=K_i$ (3)

Cualquier motor que sea girado en su eje –inclusive no sin voltaje- generará una fuerza electromotriz inducida E_b relacionada con la velocidad angular siendo:
$$E_b = K\omega = \mathrm{K}\frac{d\theta}{dt} \quad (4)$$

Respecto al esquema del motor se pueden obtener las siguientes ecuaciones basadas en la ley de Newton contextualizadas respecto a la ley de Kirchhoff:
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + Ki \quad (5)$$

$$L\frac{di}{dt} + R_i = V - K\frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$
Aplicando la transformada de Laplace con el operador *s* en (5) y (6) se obtiene:
$$Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = KI(s) \quad (7)$$

$$LsI(s) + RI(s) = V(s) - Ks\theta(s) \quad (8)$$

Expresándose *I(s)* como:
$$I(s) = \frac{V(s)-Ks\theta(s)}{R+Ls} \quad (9)$$
Sustituyéndose en (5) queda:
$$Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = K\frac{V(s)-Ks\theta(s)}{R+Ls} \quad (10)$$

Modularmente la ecuación del motor de C.D. puede ser representada en el diagrama de bloques de la figura 5.

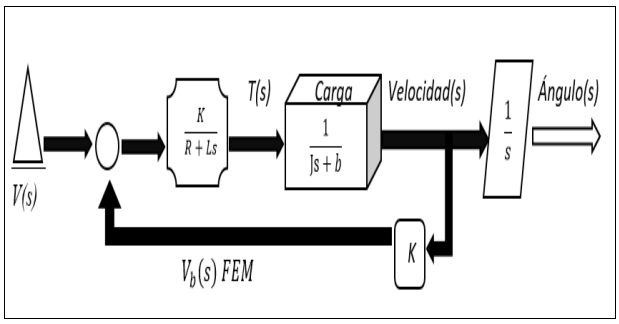


Fig. 5 Diagrama de bloques del motor de C.D.

La función de transferencia de V(s) de (10) al ángulo de salida θ sigue directamente:
$$G_a(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s\{(Ls+R)[(Js+b)+K^2]\}} \quad (11)$$

Siguiendo el diagrama de bloques anterior se puede obtener la función de transferencia de *V(s)*, para la velocidad angular ω como:

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

$$G_v(s) = \frac{\omega\,(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Ls+R)\,[(Js+b)+K^2]} \qquad (12)$$

V. Módulo Neuro-Difuso

La RNA tri-nivel sencilla puede capturar en un muestreo de intervalo *h* la señal PWM y respecto al módulo de comparación *Cmp* del DSPOC hacia el motor aplicando un peso mayor a la salida que a la entrada debido para mejorar la inercia y tiempo de respuesta:

Z= PWM(W1) + Cmp(W2);

$$Out= \begin{cases} Z < 40.00 \rightarrow \ PWM++ \\ Z \leq 300 \quad PWM = PWM \\ Z > 300 \rightarrow PWM-- \end{cases} \qquad (13)$$

Los sistemas difusos son considerados como una alternativa para la teoría de control convencional para sistemas no lineales en donde el modelado matemático preciso es muy complejo al basarse en las reglas del DSPIC en el comportamiento del sistema para realizar las operaciones matemáticas, además de que el controlador cuenta con algoritmos y funciones ahorrando *flops* del *core* interno.
En este tipo de control, las entradas son las señales analógicas del potenciómetro y el PWM, mientras que la salida es el voltaje a enviar al motor.
El control de la posición difusa utiliza un conjunto de reglas lógicas que sirven como diseño de la base de conocimiento, permitiendo la actualización de estas o su resolución mediante el firmware.
La lógica difusa es una aplicación de los conjuntos difusos de teoría de conjuntos en donde en estos los objetos pertenecen a un conjunto en función de su grado de membresía.
El módulo difuso se describe en la figura 6.

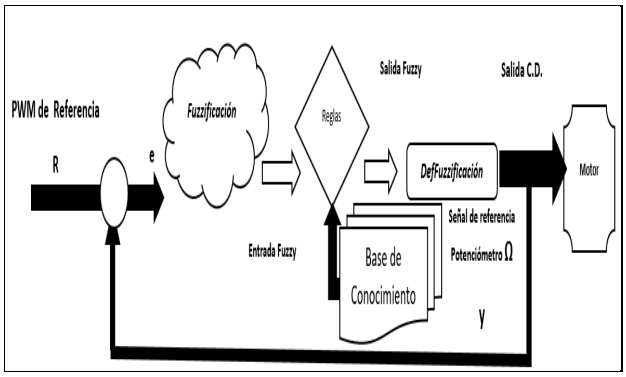


Fig. 6. Diagrama de bloques del control Fuzzy

El módulo difuso está formado por los submódulos de Fuzzificación, Base de Conocimientos, Reglas y DeFuzzificación [2].

Las unidades de Fuzzificación valores de las variables medidas en las entradas correspondientes al universo de pertenencia al intervalo cerrado [-1, +1].
Para crear la aplicación difusa en el DSPIC se requiere de Fuzzyficar un número real obtenido por el sensor del potenciómetro hacia la entrada mediante la búsqueda de su grado de membresía; es decir al recibir un dato se retorna un valor que muestra que tanto pertenece el dato a la función.
Para el sistema se manejó el siguiente grupo difuso que corresponde al PWM obtenido originalmente:

$$f(x) = |x|, donde\ |x| = \begin{cases} Izquierda \rightarrow 1.0 \leq x \leq 1.4999999 \\ Centrado \rightarrow 1.5 \leq x \leq 1.5000001 \\ Derecha \ \rightarrow 1.51 \leq x \leq 2.000000 \end{cases} \qquad (14)$$

Posteriormente se convierten los datos de entrada mapeados en conjuntos difusos basados en valores difusos, como Rápido a la Derecha (RD), Lento Izquierda (LI), utilizando una función de membresía de triángulo con cuatro secciones (x0,x1 y x2), consistiendo en {x-x0},{x0-x1},{x1-x2},{x2-xmax}

La Base de Conocimientos se encuentra enlazada a las reglas de toma de decisiones.
Para poder evaluar las reglas se definió el error como la diferencia entre el PWM enviado respecto al valor del potenciómetro para cada fase:
Error= PWM – Ω (15)
Posteriormente mediante las reglas predefinidas el controlador produce una señal denominada variable de control enviada al puente H siendo las reglas:

- *Si el error=alto ∧ valor=alto → Decremento*
- *Si el error=0 ∧ valor=alto → Decremento*
- *Si el error=bajo ∧ valor=alto → Incremento*
- *Si el error = alto ∧ valor = 0 → Decremento*
- *Si el error = 0 ∧ valor = 0 → Constante de mantener el motoreductor*
- *Si el error = bajo ∧ valor = 0 → Incremento*
- *Si el error = alto ∧ valor = bajo → Decremento*
- *Si el error = 0 ∧ valor = bajo → Incremento*
- *Si el error = bajo ∧ valor = bajo → Incremento*

La salida de la lógica de decisión concluye en la ejecución del conjunto difuso el cual debe ser ahora DeFuzzificado.
Contra una serie de conjuntos difusos de la posición angular de salida θ del motor.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Las reglas difusas requieren DeFuzzificar a partir de los valores difusos mediante la centroide del conjunto difuso de salida utilizando el comando propio del DSPIC y que es la mejor técnica [3, 4].
La DeFuzzificación por centroide viene dada por las variables donde *x* es el número de valores del conjunto difuso y donde:

$x = \{ V_0 - V_n \}$ (16)
Vi = Un valor de apoyo a evaluar.
μ*= Grado de membresía ε Vi*
$EC_{discreto}$*= Entrada de Control con valores discretos DeFuzzificados*

La salida DeFuzzificada discreta del DSPIC viene dada por su fórmula [5]:

(17)

$$EC_{discreto} = \frac{[\sum_{i=1}^{x} \mu(Vi)(Vi)]}{[\sum_{i=1}^{x} \mu(Vi)]}$$

Dentro de sus ventajas sobre otras técnicas de control se puede describir que este es más barato que otro al poderse integrar y personalizar módulos como sensores neuronales lógicos en los DSPs o DSPICs, además de que los controladores difusos son mucho más robustos que los PID al cubrir un rango más amplio de condiciones de operaciones.

VI. Motoreductor convertido en Servomotor

Contextualizando al sistema de lazo cerrado anteriormente formado por la armadura del motoreductor servo controlado se han asignado los valores de 5 *V* en lógica TTL con 10 *W* con una carga utilizando un puente H L298 pudiendo ser descrita su función de transferencia utilizando como variables a:

Ra = Resistencia de armadura del motor (Ω)
Kt = Torque del motor en función de la caja reductora (Nm)
Kb = Voltaje inducido por FEM del motor (V)
Jm = Inercia del motor rotor.
JL = inercia de la inercia extra del disco.
Bm = Coeficiente de fricción del eje del motor.
BL = Coeficiente de fricción del eje de carga del motor.
J=JmJL
B=BmBL

Siendo:

$$H(s)\frac{K_t}{[R_aJS^2+(K_bK_t+R_aB)S+K_t]} \quad (18)$$

Para el obtener su función discreta de transferencia *GP (z)*, se utilizó mediante el ADC del DSPIC un muestreo *t=10 ms*, siendo el tiempo discreto procesado:

$$G_p(z)[\frac{20.531(1-e^{-T_s}}{[S^2(S+4.9026)]}] = \frac{0.001941Z+0.001932}{Z^2-1.8432Z+0.9491} \quad (19)$$

VII. Aplicaciones

Se realizaron dos aplicaciones en la empresa Bio-Rad de México para el área de medios de cultivo que requería del suministro de una sustancia en una oblea permeable multidisco con área de 1cm de diámetro, por lo que se diseñó y construyó una bomba periestática acoplada a un motoreductor convertido a servomotor que permite la liberación del líquido, su ajuste y reprogramación de velocidad de goteo mediante su conexión a la computadora dosificando [0-0.5 ml].

La segunda implementación se logró gracias al interés de Bio-Rad una vez que el sistema periestático y la interfaz de comunicación USB-HID estaban funcionando. El experimento consistió en acoplar la transmisión del movimiento de un motoreductor de corriente directa del manipulador industrial *KUKA 363* MSK [6] mediante un potenciómetro a la tarjeta de conversión *PWM-CD* comparando el valor proporcional de la escala de un giro del motoreductor respecto a un potenciómetro de *2 KΩ,* en esta ocasión utilizando un puente H de mosfets MSK 4227 a 20 A, 200V de MSK [7] con lo que se logró comprobar en una aplicación de robótica industrial el control de un motoreductor como servomotor siendo utilizada una fuente externa para alimentar al sistema .

Una vez programada una secuencia de 25 movimientos simulando un ensamblaje, el sistema se removió de la computadora convirtiéndose en modo autónomo, logrando obtener configuraciones favorables; como se describe en la figura 7.

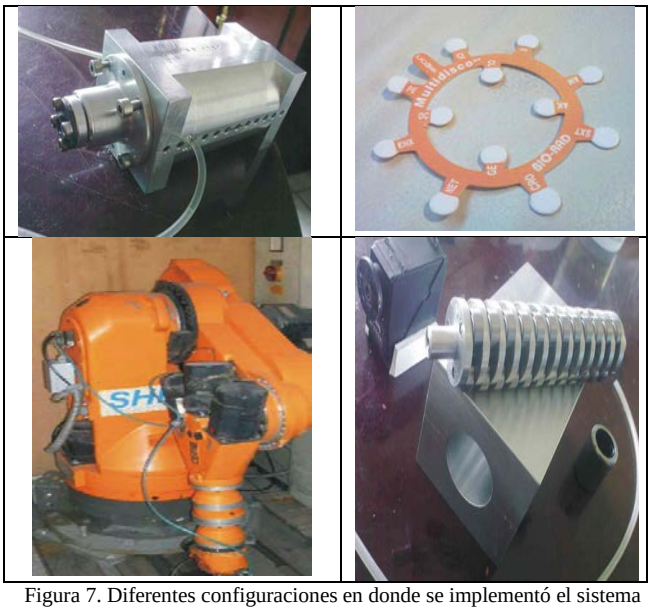


Figura 7. Diferentes configuraciones en donde se implementó el sistema como el robot Kuka, bomba periestática con multidisco Bio-Rad

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

VIII. CONCLUSIONES

Al diseñar un sistema completo desde el software, firmware y hardware para controlar el envío de señales PWM, permitió la simulación, análisis y pruebas reales de un sistema convertidor PWM-C.D.
Al diseñar un sistema completo de firmware mediante un DSPIC y Hardware, esto permitió el control total, velocidad de muestreo en tarjeta, resolución y pruebas reales.
El sistema se comportó alineándose a la señal esperada PWM respecto a la posición-valor del potenciómetro con el motoreductor, como se describe en la figura 8 mediante una medición de instrumentación virtual, la señal fue la misma ante la variación de los parámetros.

Mediante el modelado matemático se logró simular el comportamiento del sistema y mediante la construcción y pruebas se logró comprobar el modelo.
El manejo de sliders en la GUI por Lagrange permitió el control intuitivo y preciso del comportamiento del servomotor en las pruebas.

Actualmente la empresa Bio-Rad tiene en operación una bomba periestática reprogramable en modo autónomo que cuenta como servomotor un motoreductor de alto torque mediante el sistema USB-HID y PWM-C.D. descrito en este trabajo.

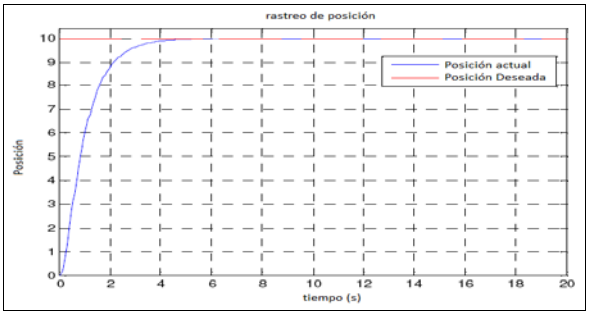


Fig 8. Medición por laboratorio virtual de la señal generada en donde se comparan la posición a la que llega el motoreductor de C.D. respecto a la deseada por el PWM

REFERENCIAS

[1] Fajardo M. y Herrera F.G. "Servocontrolador Reprogramable para Articulaciones Robóticas USB HID", en Memorias del IEEE X Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico: CIINDET IEEE 2013, Cuernavaca, Morelos, 13-15 de Marzo, 2013.

[2] Lee C. "Fuzzy Logic in Control Systems", Fuzzy logic controller, part II. IEEE Trans. On Systems, Man. and Cybernetics, 1990.

[3] Pham D.T. and Liu X. "Neural Network for Identification Prediction and Control", Springer-Verlag Berlin, Heidelberg New York, 1997.

[4] Phillips CL, Nagle HT. Digital Control System Analysis and Design, 2nd edn. Prentice-Hall, Reading, MA 1990.

[5] Kuka 363 series datasheet consultado en Agosto de 2015 de http://www.kuka-robotics.com/res/sps/f776ebab-f613-4818-9feb 527612db8dc4_PF0022_KR_210-2_en.pdf

[6] MSK 4227 datasheet consultado en Agosto de 2016 de http://www.mskennedy.com/products/Power-PEMs/MSK4227.prod

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La ecuación de la recta en la ergonomía

García de la Rosa Omar[1], Olivares Estrada María de Lourdes[2], Ceciliano Hernández Leonardo[3],García de la Rosa Hector[4] y García Ramírez Francisco Javier[5]
[1,2,4 y 5] Departamento de mecatrônica, CESCIJUC, Toluca Méx., México.
[1,3 y 4] Departamento de Ingenierías, Instituto Tecnológico de Toluca, Metepec Mex., México.
omargarcia_1978@hotmail.com, mloe09@yahoo.com.mx, lcecilianoh@yahoo.com.mx, hegar71@yahoo.com.mx y elydedy@hotmail.com

***Resumen*- Se presenta un estudio basado en un análisis ergonómico, para proponer una adaptación de las condiciones de operación con la innovación de prácticas del sistema productivo utilizando para ello las metodologías sugeridas en la Guía Técnica Española, OWAS y RULA. Se realizó la evaluación por los métodos propuestos, contrastando sus resultados con un modelo virtual generado en AutoCAD y un modelo analítico resultado del análisis de variables de la guía técnica española. Esto es un hallazgo importante dado que con una ecuación de la recta obtenida a partir de un modelo de regresión lineal, permite determinar el porcentaje de protección o el nivel de daño de un trabajador sometido a cargas sobre el aparato músculo-esquelético, de los cuales se encontró un nivel de riesgo elevado para el trabajador en el desempeño de sus tareas. Por consiguiente se pensó en alternativas sustentables para abatir tal problemática.**

***Palabras Clave*- ecuación, ergonomía, músculo-esquelético, trabajadores y salud.**

***Abstract*- A study based on an ergonomic analysis to propose an adaptation of the operating conditions of practical innovation of the production system is presented, using for it methodologies suggested in the Technical Guide Spanish, OWAS and RULA. Evaluation by the proposed methods was conducted, comparing their results with a virtual model generated in auto cad and an analytical model variables result of analysis of the Spanish technical guide**

This is an important finding because with an equation of the straight line obtained from a linear regression model, to determine the percentage of protection or the level of damage of a worker subjected to loads on the musculoskeletal system, of which he found a high level of risk to the employee in the performance of their duties.

It was therefore thought of sustainable alternatives to abate this problem.

***Keywords*- equation, ergonomics, musculoskeletal, workers and health.**

I. Introducción

Esta investigación sobre trabajo agrícola, aplicó la ergonomía como lo recomendado por Chiner, Mass y Alcaine [1], mediante un estudio de campo con la comparación de tres metodologías complementarias que cuantificaron la exposición del trabajador a cargas excesivas y movimientos repetitivos como se describe gráficamente en la figura 1.

En el área de producción agrícola, el cultivo de sorgo tiene relevancia a nivel mundial como hace referencia Báez [2] y México ocupa entre el cuarto y quinto lugar productivo. Dada la importancia del tema y al indagar sobre la producción de sorgo a nivel nacional encontramos de acuerdo con INEGI [3] que existen regiones donde la cosecha se realiza aun manualmente y en algunas parcelas o ejidos se presentan los trabajadores sin equipo de protección personal o no lo quieren utilizar porque les estorba justificando incomodidad.

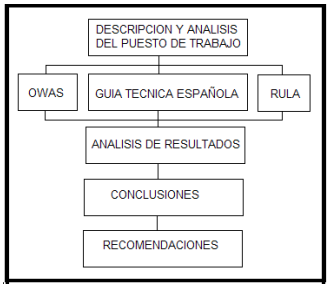


Fig. 1. Aplicación de Metodologías a esta investigación

En el área de producción agrícola, el cultivo de sorgo tiene relevancia a nivel mundial como hace referencia Báez [2] y México ocupa entre el cuarto y quinto lugar productivo. Dada la importancia del tema y al indagar sobre la producción de sorgo a nivel nacional encontramos de acuerdo con INEGI [3] que existen regiones donde la cosecha se realiza aún manualmente y en algunas parcelas o ejidos se presentan los trabajadores sin equipo de protección personal o no lo quieren utilizar porque les estorba justificando incomodidad. La tabla I muestra a los productores de sorgo en una creciente producción en los últimos años

Tabla I
PRODUCCIÓN DE SORGO

Producción nacional en ciclo primavera verano en 2012			
Estado	Superficie(Has)	Producción(Ton)	Municipios productores
Guanajuato	252,181	1,287,578	Celaya, Abasolo, acambaro, Cortázar, Ceramano, Irapuato, Perjamo, Salamanca, Salvatierra, Valle de Santiago, Villagrán, Yuriria y Manuel Doblado
Michoacán	117,234	436,192	Apatzingán, Tepalcatepec,, Perjamillo, La piedad, Angamacutiro, José Sixto Verduzco y Alvaro Obregón
Tamaulipas	234,272	205,742	Abasolo, Soto la Marina, Altamira, Gonzalez, Mante, Casas, Güemes, Ilera, Padilla, San Carlos
Morelos	41,375	188,899	Atochiapan, Ayala, Cuautla, Jantetelco, Jonacatepec, Puente de Ixtla, Temoac, Yecapixtla y Zacatepec
Puebla	20,993	53,223	Atzizihuacan, Chiefla. Cohuecan, Huehuetlán, Izúcar de Matamoros, Tepexco, Tlapanalá, Tlacotepec de Benito Juárez y Yehualtepec
San Luis Potosí	28,984	39,983	Ebano, Tamuín y Cerritos
Oaxaca	16,680	38,086	Juchitán de Zaragoza, Reforma de Pineda, San Francisco del Mar, San Francisco Ixhuatán, San Pedro Tapanatepec, Santiago Niltepec, Santo Domingo y Unión Hidalgo
Fuente: SAGARPA(2012)			

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La tarea a desarrollar es el corte de la panoja o mazorca (implica movimientos alternativos repetitivos) y su recolección es en ayates o en tambos (carga de hasta 30 Kg. en los hombros o manos), desde la surcada hasta una camioneta o un remolque. Debido a la magnitud de la carga, y a las posturas que el trabajador tiene que adoptar, es posible que el trabajador sufra daños a su salud como trastornos músculo-esqueléticos trayendo consecuencias tanto para el trabajador como para la empresa en forma económica y en productividad, de la misma manera, evitar que el trabajador no sufra daños corporales durante el desempeño de su tarea o se minimicen, y por ende las pérdidas económicas para el trabajador por concepto de pagos de servicios de salud disminuyan, con esto los trabajadores y sus familias elevará su calidad de vida.

II. DESARROLLO

La recolección de la cosecha de sorgo en algunas regiones se lleva a cabo utilizando maquinaria y equipo especializado mientras que en otras, por condiciones económicas, geográficas y culturales, solo es posible el corte de la planta en forma manual como se aprecia en la figura2.

Fig. 2. Cosecha manual de sorgo

En esta actividad se usa una hoz o un machete y se va acumulando en montones sobre la parcela o se transporta en camionetas al lugar de la molienda, según se aprecia en la figura 3.

Fig. 3. Cosecha y transporte de sorgo.

En este puesto de trabajo se tienen cargas entre 30 a 40 Kg de peso con altas frecuencias de corte y se llega a caminar hasta unos 30 metros sobre la surcada para descargar el producto. Los resultados para la posición 1 y 2, se consideran sometiendo al trabajador a cargas de 25 Kg recomendados y 40 Kg para trabajadores jóvenes y entrenados mientras que en la posición 3. Se consideraron 13 Kg recomendados y 20.8 para trabajadores jóvenes y entrenados. De acuerdo a la metodología se llenaron los siguientes formatos:

La tabla II presenta los resultados obtenidos con la aplicación de la Guía Técnica Española de acuerdo con el Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo [4] sobre 3 posturas promedio definidas sobre una población de ocho trabajadores, donde se verifica el peso teórico o recomendado contra el peso real o carga máxima a que se somete al trabajador, el desplazamiento vertical o levantamiento de la carga, en conjunto con diferentes factores dados por el algoritmo del método y donde finalmente la guía técnica otorga una recomendación del manejo de la carga real a que debería someterse al trabajador para reducir el nivel de riesgo a su salud por daños músculo – esqueléticos.

Tabla II. Resultados de la guía técnica española

	Calculo de peso aceptable	
Posicion	Peso Teorico (Kg)	Desplazamiento vertical
1 Recomendado	25	0.87
1 Maximo	40	0.87
2 Recomendado	25	0.87
2 Maximo	40	0.87
3 Recomendado	13	0.87
3 Maximo	40	0.87

Factor Giro	Factor Agarre	Factor Frecuencia	Peso Recomendado(Kg)
0.9	1	0.85	16.63
0.9	1	0.85	26.62
0.8	1	0.85	14.79
0.8	1	0.85	23.66
0.8	1	0.85	7.69
0.8	1	0.85	23.66

En las Tablas III,IV y V se presentan los resultados de las mediciones para el Método OWAS, el cual se realiza a partir de un análisis cualitativo como el mostrado en las figuras 4, 5 y 6, en el que se consideraron 3 posiciones del trabajador de corte de sorgo y comparadas contra las imágenes establecidas por la metodología.

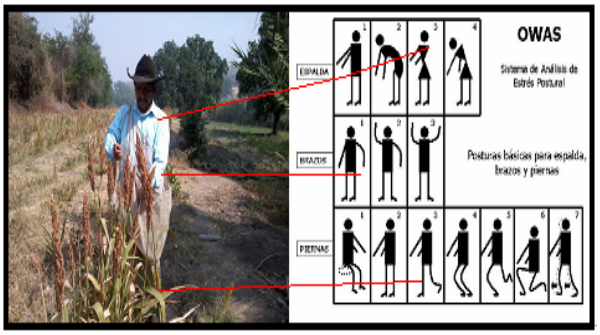


Fig. 4 Posición 1 para OWAS

Tabla III. Resultados OWAS Para Posición 1

Piernas		1			2			3			4			5			6			7		
carga/fuerza		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
espalda	brazos																					
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	2	2	3	1	1	1	1	1	2
2	1	2	2	3	2	2	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	3	3
	2	2	2	3	2	2	3	2	3	3	3	4	4	3	4	4	3	3	4	2	3	4
	3	3	3	4	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	4	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	3	1	1	1	1	1	2	4	4	4	4	4	4	3	3	3	1	1	1
	3	2	2	3	1	1	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1
4	1	2	3	3	2	2	3	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
	2	3	3	4	2	3	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
	3	4	4	4	2	3	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

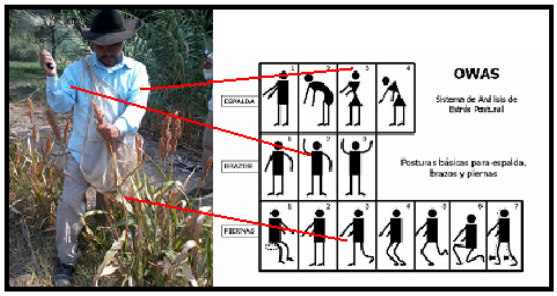


Fig. 5 Posición 2 para OWAS

Tabla IV. Resultados OWAS para posición 2

Piernas		1			2			3			4			5			6			7		
carga/fuerza		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
espalda	brazos																					
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	2	2	3	1	1	1	1	1	2
2	1	2	2	3	2	2	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	3	3
	2	2	2	3	2	2	3	2	3	3	3	4	4	3	4	4	3	3	4	2	3	4
	3	3	3	4	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	4	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	3	1	1	1	1	1	2	4	4	4	4	4	4	3	3	3	1	1	1
	3	2	2	3	1	1	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1
4	1	2	3	3	2	2	3	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
	2	3	3	4	2	3	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
	3	4	4	4	2	3	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4

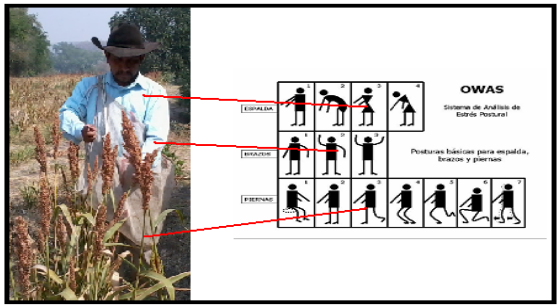


Fig. 6 Posición 3 OWAS

Tabla V. Resultados OWAS para posición 3

Piernas		1			2			3			4			5			6			7		
carga/fuerza		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
espalda	brazos																					
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	2	2	3	1	1	1	1	1	2
2	1	2	2	3	2	2	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	3	3
	2	2	2	3	2	2	3	2	3	3	3	4	4	3	4	4	3	3	4	2	3	4
	3	3	3	4	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	4	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	3	1	1	1	1	1	2	4	4	4	4	4	4	3	3	3	1	1	1
	3	2	2	3	1	1	1	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1
4	1	2	3	3	2	2	3	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
	2	3	3	4	2	3	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4
	3	4	4	4	2	3	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4

Posteriormente se realizó la evaluación con el Método Rula el cual separa al cuerpo humano en miembros superiores e inferiores y se consideraron al igual que en los otros métodos tres posiciones promedio de mediciones sobre 8 personas, como se aprecia en las figuras 7, 8 y 9.

Posteriormente se sometió la misma fotografía a la medición con el software AutoCAD y una ampliación de la imagen para visualizar las mediciones como se ilustra en la figura 10.

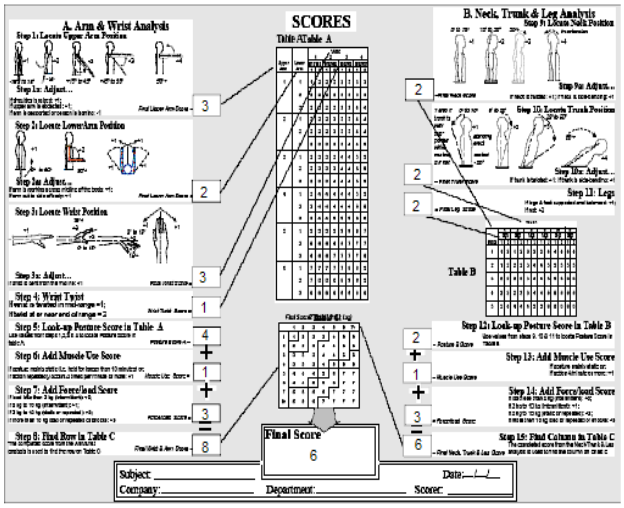


Fig. 7 Resultados Rula para Posición 1

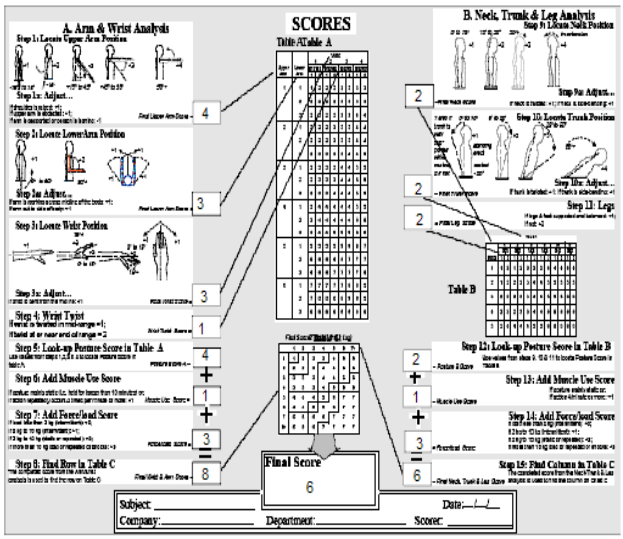


Fig. 8 Resultados Rula para Posición 2.

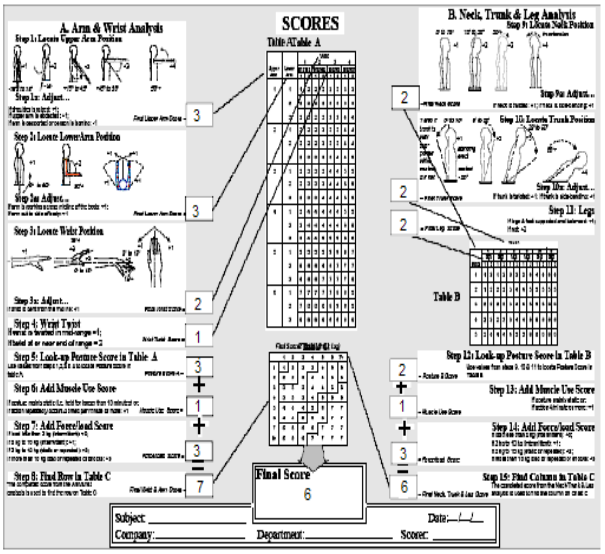


Fig. 9. Resultados RULA para posición 3

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

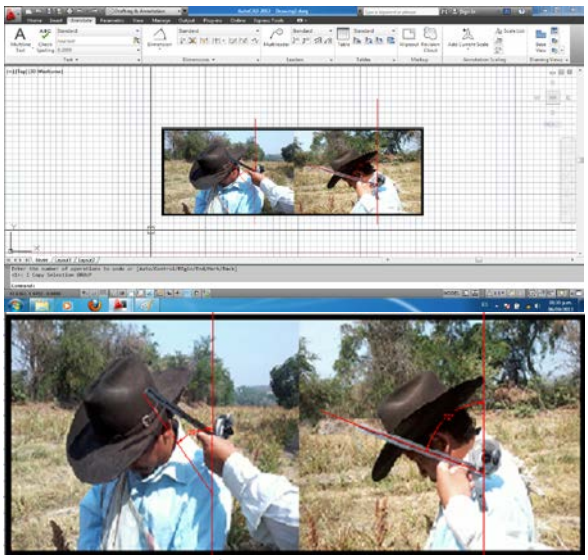


Fig. 10. Análisis de imagen con AutoCAD

Se observa que en el primer caso es de 39 grados y en el segundo caso es de 72 grados.

A continuación se presentan resultados derivados de la aplicación de un método gráfico a partir de las recomendaciones de la guía técnica española, en donde se encontró un polinomio de ajuste mediante extrapolación y ajuste de tendencia central que generaron una ecuación lineal de primer grado que sirve como un nuevo método ergonómico, en la figura 11 se presenta la ecuación de la recta obtenida para realizar análisis ergonómico:

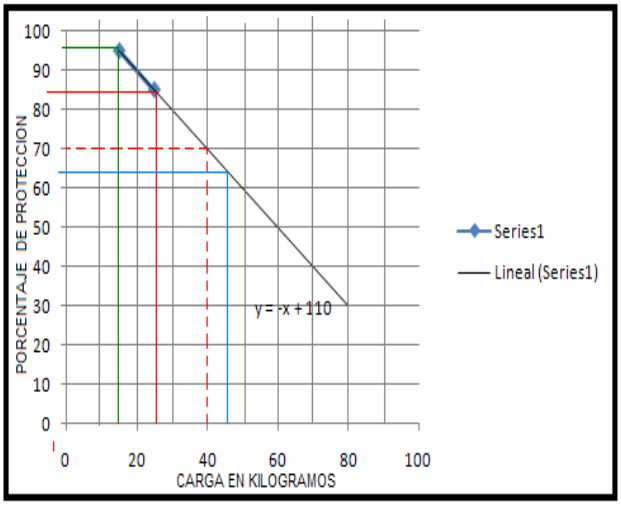


Fig. 11. Ajuste de curva para Guía técnica

La ecuación de la forma:

$$Y = -X + 110 \quad (1)$$

Nos permite predecir que bajo el comportamiento de carga expresada en Kilogramos y que la relacionamos con la variable X, se obtiene un porcentaje de protección del trabajador y la asociamos como la variable dependiente Y. Esto nos permite comprender que el alcance de las matemáticas puede extenderse hacia otras disciplinas de estudio y en este caso permite simplificar el estudio y aportar al campo de la ergonomía una herramienta tanto gráfica como analítica para predecir el nivel de protección a los trabajadores expuestos a cargas manuales y repetitivas con la finalidad de proteger la salud de las personas involucradas en las tareas.

III. CONCLUSIONES

El caso del análisis ergonómico de los cortadores de sorgo presentado es representativo para diversas regiones de México, el aporte más importante que puede realizar esta investigación es despertar el interés de académicos, empresarios y políticos por la aplicación de la ergonomía a la mejora y/o protección de la salud, seguridad de los trabajadores mexicanos.

Con la aplicación de las metodologías seleccionadas se observó que: Los resultados para la posición 1 y 2, se consideran sometiendo a los trabajadores a cargas de 25 Kg recomendados y 40 Kg para trabajadores jóvenes y entrenados mientras que en la posición 3, se consideraron 13 Kg recomendados y 20.8 para trabajadores jóvenes y entrenados, aunque realmente se transportan cargas que oscilan entre 30-40 Kg para trabajadores en general, por lo que esta ficha clasifica el riesgo como "Riesgo no tolerable" y se requiere la reducción del riesgo. Para cada una de las tres posiciones analizadas con el método OWAS se obtuvo una puntuación final de dos y representa una postura con posibilidad de causar daño al sistema músculo-esquelético.

También el método RULA con los valores de seis para cada una de las tres posiciones, plantea un rediseño de la tarea, se presume que el desarrollo de esas actividades puede desarrollar problemas de salud debidas a la ocupación.

Un hecho importante a lo largo de esta investigación es el hallazgo de una ecuación de la recta que puede ser utilizada para determinar si la cargas a las que son sometidos los trabajadores pueden causar algún nivel de daño a su sistema músculo-esquelético o el trabajador se encuentra en un nivel o rango de protección adecuada.

Este hallazgo representa un aporte de la comunidad Mexicana al campo de la ergonomía lo que implica que las Matemáticas se encuentran inmersas en las diferentes ciencias y en cualquier tiempo, como menciona García Ramírez [7], que el campo de la investigación no se encuentra acotado ni en tiempo ni en espacio, pues los limites son adecuaciones causales que al ser humano convienen.

De acuerdo a lo anterior se debe organizar el trabajo de forma que exista variación de tareas, ciclos de trabajo más largos, mecanización, mayor autonomía y control por parte del trabajador, introducción de pausas y, en definitiva, equilibrio entre las exigencias del trabajo y la capacidad del trabajador.

Debido a estas recomendaciones, se optó por mecanizar la actividad y en Rancho el Bufadero se construyó un equipo de corte mecanizado accionado por un tractor agrícola, el cual realiza la actividad (Figura 12).

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

El estudio de ergonomía aplicado, sirvió para motivar a esta organización de producción agrícola a desarrollar un equipo de trabajo diferente y apoyar su eslogan que dice: "Por un México Autosuficiente"

Fig. 12. Implementación de Sistema mecanizado de corte de sorgo

IV. REFERENCIAS

[1]Mercedes Chiner Dasi, J. Antonio Diego Mass, Jorge Alcaide Marzal. (2011).*Laboratorio de Ergonomía*. Valencia, España: Alfa-omega.

[2]Báez Rodríguez Juan (2012), *Producción y expectativas del sorgo en México*. D.F., México: SAGARPA.

[3]INEGI Censo agropecuario en México (2007).

[4]Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo INSHT (2003), Guía Técnica para la evaluación y prevención de los riesgos relativos a la manipulación manual de cargas. Barcelona, España: Ministerio del Trabajo.

[5]Mondelo R Pedro, Gregori Enrique, Blasco Joan, Barrau Pedro (2007).Ergonomía 3, *Diseño de Puestos de Trabajo*. Barcelona, España: Alfa-Omega

[6]OIT (2004), La prevención de los accidentes, Ginebra, Suiza: Alfa-Omega.

[7]García Ramírez Francisco Javier (2013), *Metodología de la Investigación*, D.F., México: ed.CESCIJUC.

CAPÍTULO 5

"EQUIDAD, GÉNERO E INCLUSIÓN EN LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS"

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La modelación y simulación como apoyo didáctico a la enseñanza de las matemáticas.

César Pérez Córdova[1], Silvia Contreras Bonilla[1], José Luis Macias Ponce1, Yatzuki Lucero de Castilla Rosales[2], Marilyn Fortiz Téllez[1].
[1]Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ingeniería.
cesarperezcordova@hotmail.com ingsilviacb_@hotmail.com, buap_ing.industrial@yahoo.com.mx, yatzuki@gmail.com, mari_yn23@hotmail.com.

***Resumen.*- Esta propuesta contribuye a reducir los obstáculos de aprendizaje que enfrentan estudiantes que ingresan a la universidad, obstáculos que se relacionan con su desarrollo psicológico y nivel de conocimientos previos, la naturaleza del conocimiento, y el método de enseñanza. El fundamento teórico de la propuesta es el constructivismo y específicamente el cognoscitivismo, apropiada al tipo de conocimientos al que se enfoca este estudio: las matemáticas. Esta propuesta no se limita al planteamiento de un sustento teórico, aborda la aplicación de la pedagogía a través de las técnicas de simulación y la convierte en un producto real con el uso racional de la tecnología computacional. El resultado es una herramienta de apoyo didáctico que transforma cualitativamente el aula. En su construcción participan estudiantes de la Facultad de Ingeniería dirigidos por los miembros de un cuerpo académico.**

***Palabras clave:* aprendizaje, constructivismo, matemáticas, simulación.**

***Abstract*- This proposal intend minimize the obstacles of learning to the students that enter to the university, obstacles of 3 types: psicologicals and knowlodgement previous, intrinsecal dificulty of topics and didactic method that utilize the teacher. The pedagogical theorical base that is utilized is the constructivism applied to mathematics. This proposal not is limited to definition of a theorical base, but board the practical aplication of pedagogy thru simulation techniques and result in a real product with the rational use of computer. The result is a tool of didactic support that transform in form qualititative the classroom.**

***Keywords*- learning, constructivism, mathematics, simulation**

I. Introducción

La presente ponencia es fruto del trabajo que se desarrolla en el Laboratorio de Tecnología e Investigación de la Facultad de Ingeniería en apoyo al Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnología a la Enseñanza en el Tronco Común. La problemática que justifica el proyecto, es la existencia de obstáculos de aprendizaje en los alumnos que ingresan a la Facultad, obstáculos que pueden ser clasificados por su naturaleza y características, en tres tipos:

Ontogenéticos [1]: que consisten en limitaciones neurofisiológicas derivadas de la propia evolución, el estadio de desarrollo en que se encuentra, influido por el medio social, cultural y educativo en que ha vivido, y los conocimientos previos que ha logrado adquirir.

Epistemológicos [1]: dificultades intrínsecas de los conocimientos. Estas dificultades son diferentes para cada conocimiento y es posible encontrarlos en la historia de los conceptos mismos, esto no quiere decir que se habrán de reproducir con igual nivel para todos los sujetos.

Metodológicos [1]: que se refieren a los métodos que utilizan los maestros para enseñar, de acuerdo a un modelo educativo específico. Son los obstáculos metodológicos, sobre los que los profesores e instituciones educativas pueden actuar para mejorar el resultado de la educación, buscando los métodos de enseñanza apropiados, apoyados en el uso racional y responsable de la tecnología.

El objetivo del presente trabajo es la elaboración de herramientas de apoyo didáctico, mediante modelos de simulación que faciliten la manipulación, exploración y descubrimiento de los conceptos matemáticos.

II. Marco Teórico

A) Fundamento Pedagógico

El punto de partida de este trabajo fue la selección de la didáctica apropiada para la enseñanza de las materias básicas. Es convicción de los autores, que la mejor metodología didáctica para la enseñanza de las matemáticas, física y otras materias fundamentales de la ingeniería es, con mucho, la que está fundada en la escuela psicológica de J. Piaget [2], continuada actualmente por la Escuela de Ginebra, porque da luz sobre los mecanismos de aprendizaje y desarrollo e identifica con claridad los procesos de asimilación, acomodación y organización, llegando a plantear con claridad los escenarios que debe tener el acto de aprendizaje. Las siguientes palabras del psicólogo suizo resumen su concepto del aprendizaje: "El conocimiento, no es una copia de la realidad. Conocer un objeto o un evento no es simplemente verlo y hacer una copia mental o imagen de él. Conocer un objeto es actuar sobre él; conocer es modificar, transformar el objeto y entender el modo como está construido. Así, una operación es la esencia del conocimiento, es una acción interiorizada que modifica el objeto mismo". Habiendo clarificado la base metodológica, con apoyo en el trabajo de Hans Aebli [3] que traduce la teoría psicológica de Piaget a una teoría de instrucción, surge la pregunta: ¿Cómo convertir estos conceptos en herramientas concretas que pueda utilizar el profesor? Este proyecto intenta responder a dicha pregunta.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

B) Diagnóstico

En otoño de 2015 se realizó un examen diagnóstico a alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ingeniería de la BUAP. Las preguntas versaron sobre cuatro conocimientos básicos, y las respuestas confirmaron la problemática mencionada en la introducción: (Figura1)

1. Conjunto de los números.
2. Simplificación.
3. Propiedades de los logaritmos.
4. Trigonometría

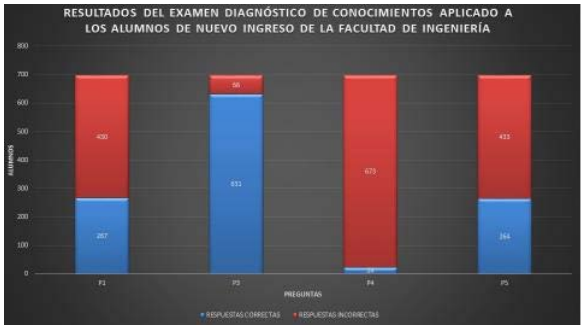


Figura1. Resultado de la prueba diagnóstica

C) Estrategia de aplicación.

Las técnicas de simulación de modelos matemáticos y la tecnología computacional actual, ofrecen una combinación excelente que ayuda a hacer realidad los conceptos de manipulación, exploración y descubrimiento. Los medios múltiples con que cuenta la computadora permiten agregar claridad; sin embargo, se ha explorado poco sobre la integración de métodos didácticos, técnicas de simulación y facilidades de cómputo.

En la descripción de los programas de cómputo de apoyo a la enseñanza de la ingeniería se muestra cómo se combinaron los tres aspectos para elaborar los modelos que se presentan.

Algo que agrega valor al proyecto de la Facultad de Ingeniería es la participación de estudiantes de la Facultad de Ingeniería en la elaboración de estos programas. Son dos los aspectos más valiosos: la inducción de estudiantes de alto rendimiento en materias de Informática y Métodos Numéricos, a actividades de desarrollo e investigación orientándolos a no limitarse a "aprender para usar" tecnología hecha, sino "aprender para hacer" tecnología propia; en segundo lugar, el hecho de que los programas se apegan a los planes de estudio y pueden ser modificados en la misma Facultad.

III. PROPUESTA

A) Un ambiente de aprendizaje

Contando con estas herramientas de apoyo didáctico, lo siguiente es definir la forma de utilizarlas.

Los programas desarrollados no están diseñados para utilizarse en forma individual en un laboratorio con múltiples equipos de cómputo, sino en un aula normal a la que se dota de tres equipos fijos: una computadora en la que están instalados los programas, un cañón y un pizarrón electrónico.

A este ambiente de aprendizaje se le ha denominado "Aula de Simulación" y es necesario distinguir este concepto de otros que podrían asemejarse.

B) Lo que no es un Aula de Simulación

- Un aula multimedia donde se ofrecen diversos recursos para presentar información con medios visuales y sonoros y con ayuda de programas que facilitan la presentación de textos e imágenes.
- Un aula virtual donde se puede conectar con un expositor remoto e interactuar con él, inquiriéndole sobre cualquier aspecto de su tema.

C) Lo que sí es un Aula de Simulación

- Un espacio donde un grupo, con asesoría del profesor, explora nociones matemáticas, sistemas y fenómenos a través de simuladores que permiten manipular libremente las variables, ver la respuesta de manera numérica, gráfica y física, discutir en clase los resultados, cambiarlos, elaborar hipótesis y probarlas de manera inmediata.

Según esto, el profesor imparte su clase normalmente, y llegado el momento que estime apropiado, después de enseñar alguna noción, muestra a los alumnos el simulador que corresponde al tema que acaba de presentar y los alumnos plantean el problema, con la diferencia de que ahora la variación de los datos puede arrojar resultados inmediatos de manera numérica, gráfica y física.

D) Muestra de algunos simuladores desarrollados

Hasta ahora se ha presentado el proyecto de manera descriptiva. A continuación se muestran algunos de los programas de matemáticas que han sido desarrollados haciendo énfasis en su valor pedagógico [4].

- El primero es una Función Polinomial que el alumno puede construir a través de "scrolls" o cambiadores continuos de valor de variables. (Secuencias de figuras 2 a 4)
- El segundo es la derivada de una función polinomial. (Figura 5)
- El tercero es una aplicación de la derivada a un problema de optimización. (Secuencias de figuras 6 a 8)
- El cuarto, una simulación de una carrera de autos en que la distancia es la función, la velocidad es la primera derivada, y la aceleración la segunda derivada. (Figura 9)
- Finalmente un ejemplo de un conjunto de programas de espacios vectoriales que se desarrolló para el Instituto Nacional de Ciencias Aplicadas (INSA) de Francia y la Universidad de Paraná, Brasil (UFPRN). (Figura 10)

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

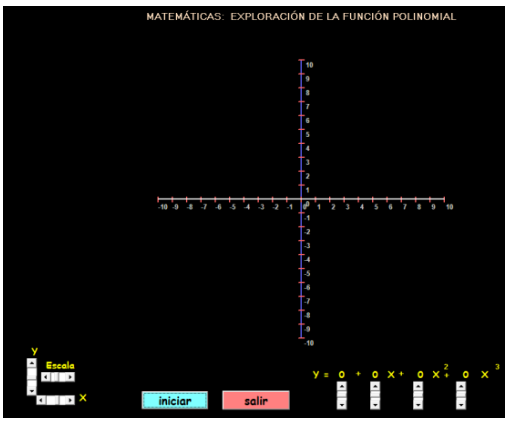


Figura 2. Primera imagen función polynomial

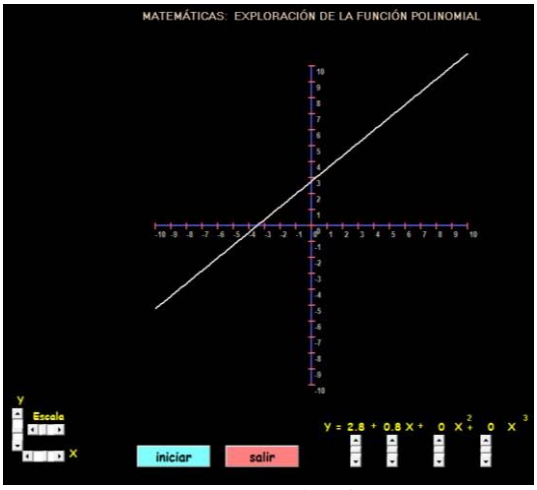


Figura 3. Segunda imagen función polynomial

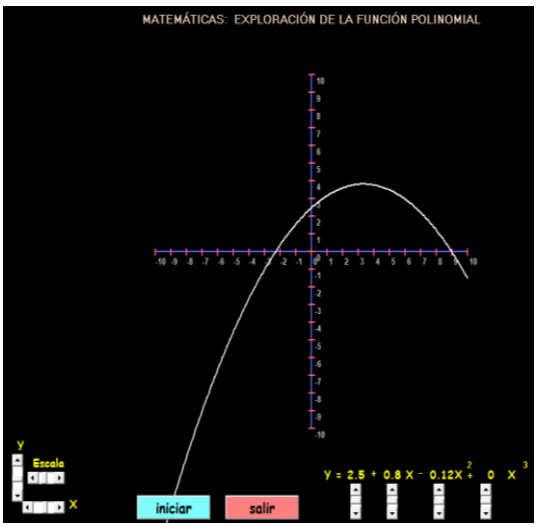


Figura 4. Tercera imagen función polynomial

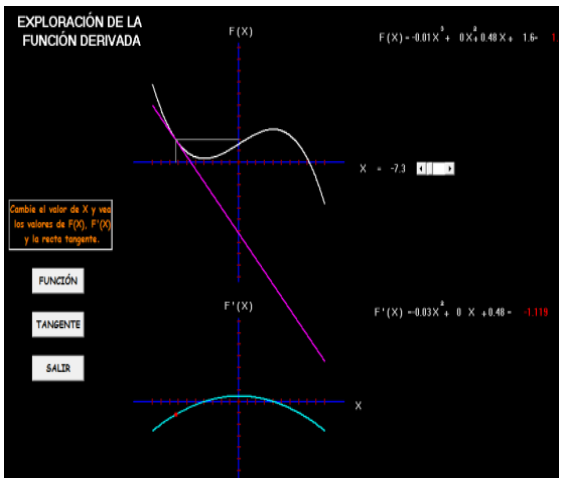


Figura 5: Derivada de una Función Polinomial

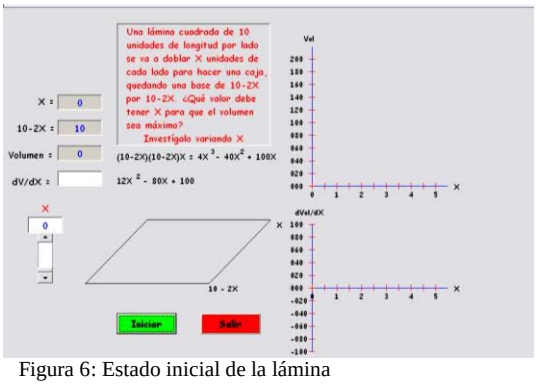


Figura 6: Estado inicial de la lámina

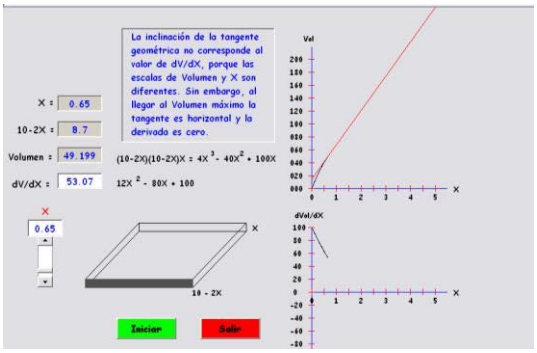


Figura 7. Doblez de 0.65. Se muestra el Volumen y el valor de la derivada

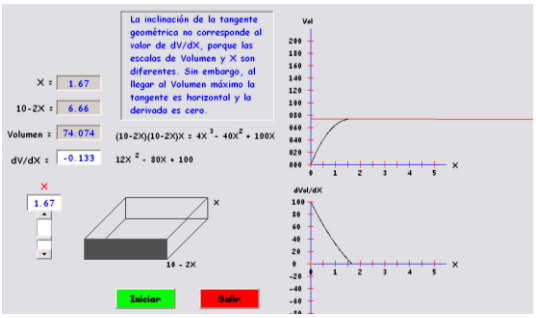


Figura 8: Doblez de 1.67. Volumen Máximo

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

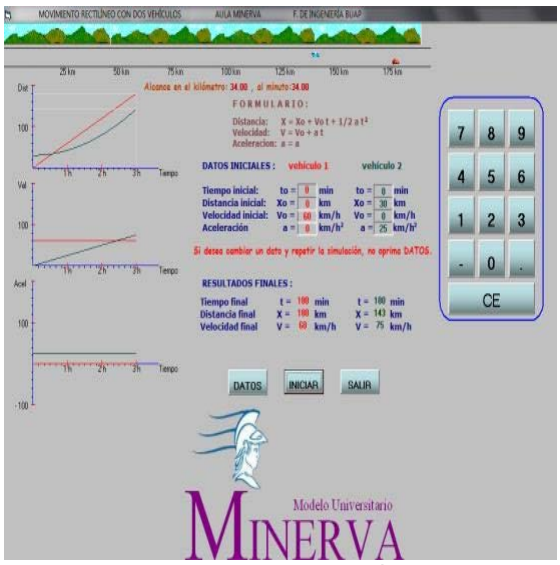


Figura 9: Cuarto modelo. Carrera de autos, simultáneamente se muestra el modelo simbólico, gráfico y físico.

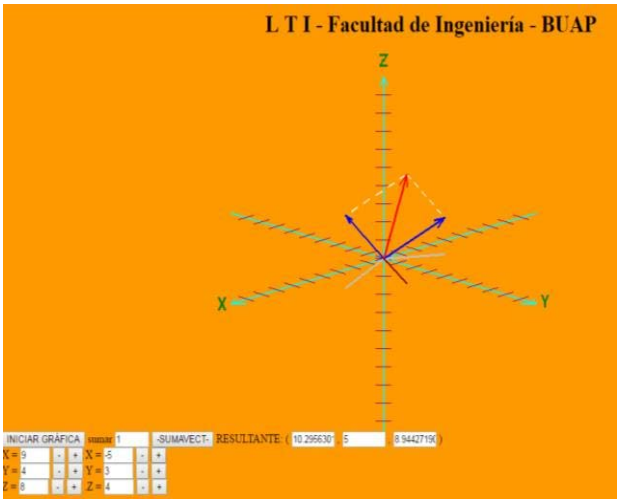


Figura 10: Quinto modelo. Espacios vectoriales

las carreras de ingeniería, por lo que los docentes se apoyan en ellos para ayudar a que el alumno construya su propio conocimiento. (Figura 11)

Fig. 11. Mtra. Silvia Contreras impartiendo un taller de Aula Minerva a maestros

IV. CONCLUSIONES

La enseñanza de las matemáticas ha sido un reto muy grande, pues es una de las áreas del conocimiento más difíciles de aprender y enseñar. Lo aquí mostrado es el resultado de varios años de trabajo en la facultad para colaborar a vencerlo, esto mediante la modelación y diseño de simuladores que satisfacen las necesidades pedagógicas en el aula. Su aplicación y ventajas han trascendido las fronteras de México, y es convicción de los autores que debe continuar divulgándose, razón por la cual se presenta en este importante foro. El trabajo desarrollado en este proyecto ha sido largo e intenso, pero muy cuidadoso; se interactúa con profesores y estudiantes para recibir retroalimentación y mejorar continuamente estos productos.

REFERENCIAS

[1] Lira F, (2013). Diccionario de las Ciencias de la Educación. Colombia: Grupo Editorial de Libreros. S.A. de C.V.
[2] Piaget, J. (2003). Aprendizaje y desarrollo. México: Ediciones UNAM Facultad de Psicología.
[3] Aebli, H. (1980). Una Didáctica Fundada en la Psicología de Jean Piaget. Argentina: Kapeluz.
[4] Pérez, C. Contreras, S. Macías, J. (2013). Ambiente de Aprendizaje Basado en simulación y Lúdica. México: Editorial BUAP.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La didáctica de la matemática como estrategia para enriquecer la inclusión educativa

Erick Solís Hernández[1].
[1]Subdirector de gestión escolar.
Secundaria Diurna No. 311 Francisco Larroyo, Iztapalapa CDMX.
Dirección General de Servicios Educativos en Iztapalapa, CDMX.
zacsaasil@gmail.com

"La amabilidad y generosidad en la escuela es un lenguaje que un alumno sordo te puede enseñar a escuchar sin esperar nada a cambio"

Profesor Numerín

***Resumen*- La secundaria es el nivel más cuestionado por la forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un docente tiene todo un reto al diseñar un ambiente de aprendizaje que permita a todos los alumnos estudiar en las mismas condiciones, respetando el estilo de aprendizaje o inteligencia múltiple, pero si existe alguna discapacidad, implícitamente pondrá en juego no sólo su experiencia académica, sino sus limitaciones y prejuicios de lo que significa una discapacidad. Cuando se presenta una oportunidad para cuestionar el quehacer educativo es un buen pretexto para intentar diseñar estrategias que favorezcan una inclusión educativa. Aún en la actualidad por la complejidad y el paradigma educativo entre integración o inclusión, inevitablemente se requiere de otro perfil del docente que coordine un ambiente adecuado para que el alumnado tenga un proceso de transformación en el aula que incida en la enseñanza y aprendizaje.**

***Palabras Clave*- didáctica de la matemática, diversificar, estilos de aprendizaje, inclusión, integración.**

***Abstract*- The secondary level is the most questioned by the way teaching and learning of mathematics. A teacher is a challenge to design a learning environment that allows all students to study under the same conditions , respecting the style of learning and multiple intelligence, but if there is a disability , implicitly put into play not only their academic experience , but its limitations and prejudices which means a disability. When there is an opportunity to question the educational work is a good excuse to try to design strategies that promote educational inclusion. Even today the complexity and the educational paradigm between integration or inclusion, inevitably requires another profile of teachers to coordinate a suitable environment for students to have a process of transformation in the classroom that affects teaching and student learning.**

***Keywords*- teaching mathematics, diversification learning styles, inclusion, integration.**

I. El Paradigma de la inclusión educativa

El sistema educativo mexicano le da la oportunidad a cualquier alumno con discapacidad para que sea aceptado en una escuela regular, de hecho existe mucha bibliografía institucional que justifica y fundamenta esta situación. Pero una cosa es la teoría dictada desde un escritorio a la realidad educativa que existe en una escuela de educación básica a nivel secundaria. Un sencillo ejemplo con una directiva con alto nivel o rango educativo en Iztapalapa (regional para ser más preciso) que de forma categórica cuestionaba a un directivo de secundaria por los resultados tan deplorables que se obtenían en la prueba ENLACE[I] (463 en promedio), le argumentaba que los resultados eran el reflejo del trabajo realizado por el director y que era una verdadera ofensa a la rendición de cuentas con los padres de familia que inscribirán a sus hijos en la secundaria.

Institucionalmente y estadísticamente podría tener razón la directora regional, pero cuando escucho el argumento del director donde le explicaba que nunca en los tres años que tenía de trabajo en la escuela (dos como subdirector y uno como director) había existido un examen para los alumnos Sordos[II], los cuales desde hace 5 años atrás habían establecido una comunidad que buscaba como una opción educativa esa secundaria, donde otras no los aceptaban pues la justificación era que no contaban con el personal especializado y que esta secundaria contaba con ciertas características que les permitía continuar su preparación académica para continuar a nivel medio superior, pero que además las autoridades educativas tenían conocimiento de esta comunidad Sorda así como de las necesidades de educación especial de la escuela, por lo tanto no era equitativo comparar la escuela con las demás con un examen estandarizado.

La respuesta fue contundente y muy significativa por parte de la directora regional: "que todo lo anterior no debería influir en los resultados globales de la escuela", este diálogo que pareciera sacado de un cuento de ciencia ficción educativa, es una muestra de cómo el sistema educativo empodera a burócratas[III] educativos que si bien no quieren o no tienen posibilidad de hacer cambios, por lo menos tendrían la capacidad de respetar el trabajo de una comunidad académica, pero lo peor es que este hecho fue y es una muestra de lo que significa invisibilizar[IV] a las personas con una discapacidad[V] y de cómo un argumento político institucional vuelve al sistema educativo igualitario y no equitativo[VI].

En esta breve introducción ¿Qué relación tendría con la enseñanza de las matemáticas? Ante la respuesta obtenida lejos de lograr burocratizar al director y que contagiara a su comunidad, el director busco otras alternativas donde aprovechó, fortaleció y enriqueció el trabajo que se realizaba en la secundaria, desde una gestión con la comunidad, hasta de forma especializada en la asignatura de matemáticas, lo

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

cual era un total desconocimiento tanto del supervisor de la zona[VII] como de la directora regional.

Nunca se enteraron de la propuesta matemática del director ni de los alcances logrados antes y después no solo con la comunidad de alumnos sordos. Esta comunidad contaban con el apoyo de una intérprete en lengua de señas mexicana y terminando la jornada escolar el subdirector (después director) los apoyaba en cuestiones matemáticas en forma de asesoramiento en temas en específico y al ir observando los alcances decidió que de manera grupal podría apoyarlos como profesor frente a grupo; toda una afrenta al paradigma directivo.

Así como este ejemplo, son las situaciones que pasan los personajes educativos que intentan inmiscuirse en los ámbitos de la inclusión educativa, el mismo sistema representado a través de un burocratismo es la primera barrera a vencer, la segunda es el prejuicio y la tercera el miedo a romper lo establecido.

Hablar de inclusión educativa causa mucha controversia con los docentes que no están inmersos en la terminología oficial ¿Incluir es lo mismo que Integrar? En términos matemáticos ¿será lo mismo cuando se habla de dos figuras semejantes a dos figuras iguales? Algo similar pasa en la escuela, se piensa que es lo mismo; pero no es así.

Si hablamos de Inclusión educativa, inevitablemente el rol del docente cambia de manera muy drástica ¿cuáles serían las características de los alumnos "normales"? Hablar de normalidad en el aprendizaje siempre ha estado relacionado con la capacidad intelectual y no creo que un profesor de matemáticas en su planeación solicite a sus alumnos un test de inteligencia que diga y demuestre que son normales ¿o sí? En el contexto de la educación, se llegó a confundir los términos de un aula integradora con los de un aula inclusiva.

El primer concepto se manejó en México con la reforma educativa de 1993 (integración educativa[VIII]) en dónde se entendía que si se tenía un alumno cuyas características ameritarían que fuese inscrito en educación especial, se trataría de integrarlo a la escuela regular, pero ¿eso qué significaba? En muchos de los casos se entendía que era aceptar a un alumno con discapacidad en un espacio áulico, no diseñar estrategias de intervención por parte del docente (en nuestro caso de matemáticas).

Con la inclusión educativa[IX] se deberá entender como un modelo que permite la transformación de la práctica, cultura y política escolar, con base en un enfoque de derechos humanos, cuestiones sociales, como una forma de vivir y posicionarse de la realidad y como un proceso. Ainscow y Booth (2000) refieren que la educación inclusiva es un proceso que busca responder a las necesidades de todos los alumnos y satisfacerlas a través de una mayor participación en el aprendizaje, reduciendo la exclusión.

Sin entrar en detalles de terminología oficial, los conceptos han llevado a plantear que la escuela debe estar abierta a la diversidad, en donde se tengan las condiciones favorables. En México el concepto de diversidad[X] plantea que todos los alumnos tienen unas necesidades educativas particulares para poder acceder a sus experiencias de aprendizaje que le permitan su formación académica y la socialización. Se intenta avanzar en los conceptos de un modelo educativo de integración, hacía un modelo social que impulse y permita la inclusión

Institucionalmente es lo que se debería hacer en cada escuela, pero la inclusión va más allá, pues a través de ella se puede lograr mucho, no sólo en lo social sino en lo educativo sobre todo en la enseñanza y aprendizaje, es decir, de cómo se puede involucrar a otra persona en otro plano, nos obliga a diversificar e implícitamente se da una interdisciplinariedad ubicándonos en nuestra limitante como docente, ocasiona discordia ¿por qué? Porque comenzamos a observar con más detenimiento las diferencias y como sucedió con el director no en forma negativa, de segregación, de saber si eran más listos o no, si entregaban de forma rápida o correcta, sino en un contexto donde empezó a descubrir que existían otras estrategias de solución, raras, inentendibles, extrañas y hasta creativas que los "alumnos normales" no presentaban. Pero sobre todo le permitió rediseñar algunas estrategias que daban un 99 %de efectividad con alumnos y alumnas de escuela regular y que fallaban en un 100 % con una persona con discapacidad auditiva.

II. La cuadratura de la matemática en la inclusión educativa

La historia del director comienza pensando en primer lugar para apoyar a su comunidad y posteriormente ir adecuando las situaciones didácticas[XI], aprendiendo de los errores y limitaciones que se fueran presentado para que se pudiera compartir en diversos contextos (congresos, platicas con otras escuelas o simplemente como charla educativa) pero conforme fue creciendo esa aventura, termino siendo como un reporte de una experiencia didáctica que ha permitido una docencia más reflexiva no sólo en cuestiones matemáticas sino en el quehacer educativo.

Todo comenzó como apoyo en forma de asesoramiento a la comunidad sorda que se encontraba en la escuela secundaria diurna No. 267 Teodoro Flores, región San Miguel Teotongo en la ciudad de México, Distrito Federal, delegación Iztapalapa, con la consigna de ir diseñando situaciones didácticas que permitieran motivar a los alumnos sordos a poder movilizar sus saberes en otros contextos, pero sobre todo poder continuar sus estudios en el nivel de bachillerato.

Comúnmente cuando un docente observa a un alumno que contesta a todo bien, que hace lo que se le indica al pie de la letra, se le llega considerar como un "alumno muy inteligente", pero habría que imaginar a un alumno que nos da soluciones extrañas, que tiene el cuaderno sucio, que termina las cosas a su manera, es decir; se comunica de forma diferente a los demás.

Con los avances en la neurociencia en este momento podremos asegurar que todos tenemos la capacidad de comunicarnos a través de un lenguaje, el cual se puede

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

manifestar de muchas maneras (por ejemplo haciendo señas con la mano) en el caso del director para poder comunicarse con los alumnos Sordos tuvo que conocer y aprender lo básico de un lenguaje de signos como una forma de comunicación, en este caso fue la Lengua de Señas Mexicana con el apoyo de la intérprete[XII] que ya trabajaba con la escuela.

Para no perder lo más significativo de lo que iba pasando con la comunidad de alumnos sordos, se utilizó un registro de observaciones y aunque no se elaboró algún instrumento o guía de observación, sólo se recopilaba la información que se iba obteniendo intentando ir de lo general a lo particular, para al final poderla agrupar y presentarla como un reporte de experiencias didácticas, esto último lo tenía muy consciente el director por la necesidad de argumentarlo con las altas esferas intelectuales educativas de la SEP y así poder solicitar apoyo y mejorar el servicio ofrecido por la escuela.

Fuenlabrada (2007) menciona que en la didáctica de la matemática, al alumno se le considera como sujeto pensante, se le permite resolver un problema y lo resuelve con base en lo que él trae de bagage cultural, lo que se espera es que piense sobre el problema, pero desafortunadamente la experiencia ha demostrado que al trabajar con la propuesta de resolución de problemas, el problema es a nivel de mensaje, y es por eso que (desde su perspectiva) a través de la didáctica se pueden aterrizar las competencias.

¿Sujeto pensante? ¿Nivel de mensaje? En un principio el director buscó involucrarse como cualquier miembro de la comunidad, pero al ir conociendo el contexto escolar y social, al conocer que existía una interprete, diálogo con ella para saber cuál era la estrategia pedagógica de trabajo con la comunidad sorda. Comentó que ella era la que había tenido que aprender estrategias para enseñar química, biología, español, matemáticas y que muy pocos se habían interesado en aprender señas para comunicarse con los alumnos, aunque los respetaban y apoyaban, no pasaba de ahí.

En cuestiones matemáticas en esos momentos los alumnos sordos de tercer grado no contaban con apoyo para aprender ciertos conceptos que eran solicitados en la guía de estudio. Uno de ellos era el sistema binario, las series numéricas y fracciones. Se le hizo muy fácil al director (entonces subdirector) comentarle a Cristina (la intérprete de LSM) qué le diera media hora para explicar el concepto de cero, su uso y aplicación en un sistema binario, es más todavía en tono de burla le comentó que lo intentaría a un nivel "play school" pues sus antecedentes como profesor frente a grupo y propuestas sobre la enseñanza de las matemáticas en diversos congresos de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas le daban la suficiente confianza; la media hora se convirtió en un mes para poder lograrlo.

Se dedicó a recuperar mucho material didáctico como las regletas de Cuisenaire o las regletas de Napier no para enseñarles las tablas de multiplicar, sino para mostrar otra forma de multiplicar, pues un alumno sordo mentaliza mucho las operaciones, por lo tanto si un alumno sordo no tendría un estilo auditivo[XIII] se tendría que aprovechar su estilo visual y kinestésico; así que el material didáctico[XIV] sería una herramienta muy útil y significativa.

Inició con la representación geométrica de una serie numérica aprovechando las regletas de Cuisenaire, utilizó los números figurados de la escuela pitagórica para que posteriormente se hiciera una analogía con los interruptores de los focos en donde el 1 sería "prendido" y el 0 "apagado" y aprovechando la representación geométrica de la regleta y el valor de las potencias de 2 (1, 2, 4, 6, 8). Todo iba de maravilla (según el director) le prestaban atención en las sesiones, se le interpretaban su estrategias e ideas, pero había un detalle, los tres alumnos sordos no entendían nada de lo que se les explicaba, surgió entonces la duda, la desesperación, ¿Cristina no sabía cómo traducir los conocimientos matemáticos? O el director no sabía y no podía comunicarse con los alumnos, entonces ¿quién mostraba las barreras al aprendizaje? ¿Quién era entonces el que mostraba una discapacidad?. El director conoció que un sordo entiende el cero como ausencia y que era todo un reto describir que en un sistema posicional como el binario, el cero representa una potencia de 2 que no se utiliza, por lo que al diseñar la situación didáctica se volvía un completo caos con los alumnos, con la interprete y con él mismo, por no poder comunicar lo que él siempre había hecho con alumnos oyentes.

Además no sabía que la mayoría de los sordos, su primera lengua no es el español, sino la lengua de señas mexicana, así que cuando llegó con su estrategia de la historieta como recurso didáctico, si intentaba escribir y escribir las explicaciones, ellos jamás lo entenderían, pues no leen o en un sentido estricto no decodifican como nosotros y además hay palabras y conceptos matemáticos que no tienen un significado para ellos y mucho menos existe una seña en LSM. Guy Brousseau (2007) comentaba que en la didáctica de la matemática, no es suficiente saber matemáticas, sino hay que entender cómo se organiza y es por eso que la teoría de las situaciones didácticas ha sido muy difícil su comprensión, pues no es una metodología de enseñanza, sino es entender el cómo funciona la matemática y por ende es muy importante saber observar como docente, aprender a reorganizar y saber utilizar los errores.

Así comenzó a utilizar la didáctica de la matemática, su primera estrategia fue aprender el alfabeto en señas, después aprender las señas básicas de matemáticas (como número, matemáticas, aritmética, geometría, etc.) y por supuesto los números en LSM, la segunda estrategia fue utilizar algunas habilidades y destrezas que el manejaba, así que comenzó a diseñar algunos dibujos que le permitieran representar una clasificación de los números.

Al clasificar los números por sus propiedades geométricas, el alumno Sordo encuentra un apoyo para su comprensión pues son más visuales, lo que permitió hacer más significativo las regletas de Cuisenaire y así representar un número, por ejemplo el 12 sólo tendrían la posibilidad de formarlo con determinadas regletas que en la situación didáctica tendrían un valor de 1, 2, 4, 8,16. Al ver la necesidad para que se entendiera la analogía entre un foco y

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

un número binario, con apoyo de Cristina, se les ocurrió crear una seña para esta situación, a esta seña le llamarón "número foco", lo cual permitió hacer entender de forma muy didáctica a los alumno que en el sistema binario, el cero no se cambia, sino se transforma y dependiendo la posición o lugar que ocupa, se apaga o se prende ese número foco.
Los alumnos se motivaron sobre todo porque entendieron que el director tenía ganas y estaba interesado a aprender con ellos, haciendo un contrato didáctico, ellos enseñaban señas (y estrategias didácticas de manera implícita) y él director los apoyaba en cuestiones matemáticas. Lo anterior permitió que ayudaran a crear otras señas con base en el mismo principio, como la seña de número zanahoria para ejemplificar los números de la serie de Fibonacci, los números chipote para los números impares, pues si lo divides entre dos, siempre te sobra uno, los números foco que representan las potencias del dos, los números ladrillo para ejemplificar los números primos, pues se les contó que ellos son los que permiten construir a los demás números, los números cuadrados o los números triangulares, éstos últimos de manera geométrica se les facilitó mucho su comprensión, ya que no sólo podían observarlos, los podían sentir con apoyo de un material concreto como las regletas de cuisenaire, pero además podían ver una aplicación significativa con las formación de series numéricas.
Este diseño de situación didáctica permitió algo muy interesante, se logro pasar de un concepto oral a uno visual, se pudo crear una seña en específico para que una analogía entre un foco y un concepto matemático como el sistema binario tuviera un situación electrónicamente válida, permitió que se apropiaran del concepto de número binario; esto implícitamente fue una adaptación curricular.

A través de la didáctica de la matemática se trata de encaminar a los alumnos a una defensa de ideas, de conjeturar, de compartir su conocimiento, de saberlo aplicar en diferentes contextos, de buscar diferentes estrategias de aprendizaje, de discernir, de trabajar en equipo. Conforme se realizaban las asesorías, los alumnos adquirían mayor compromiso y ellos mismos se dieron cuenta que les beneficiaba mucho el manipular los modelos geométricos. Así en una especie de "complicidad didáctica" nació la necesidad de clasificar de una manera muy sencilla la matemática y con sus respectivas señas, por ejemplo la aritmética (para ellos sería la seña de número) para la geometría (sería la seña que ejemplifica un trazo circular de un compás) para la probabilidad (sería la seña que ejemplifica el lanzamiento de una moneda), para la estadística (sería la seña que ejemplifica una gráfica lineal) y el para álgebra (una seña que ejemplificaba la letra X, pero saliendo de la cabeza).

Esto permitió en que en los temas dónde se enlazaban conceptos de física como por ejemplo el despejar una incógnita los alumnos sordos se les hiciera más fácil su comprensión al enlazar la seña de álgebra y su aplicación en física, despejando la letra de una fórmula; lo mismo que en una ecuación de primer grado en la materia de matemáticas.

III. La cuadratura institucional vs la didáctica de la matemática

Sabiendo que sería el director de la escuela, organizó los horarios escolares para poder atender a un grupo, no de forma espontánea o cuando faltará un profesor, sino de forma adecuada y organizada. Así el grupo 1° D estaría en un trabajo didáctico, ahí estarían 4 alumnos Sordos, ya con la experiencia se re-diseño la estrategia didáctica con el apoyo de una historieta.
La nueva historieta tendría ciertas características por lo que se crearon personajes como "el Silver Charro", "el Monsieur Pichard", "el Sidoshi" y el "Profesor Juan T. Zillo"[XV] los cuales en la clase se dibujaban e iban comentando los conceptos matemáticos, cada personaje tenía su propia historia, desde de por qué iba apareciendo y sus aventuras matemáticas. Para las y los alumnos Sordos conforme iban aprendiendo se les elaboraba episodios donde cada personaje era el interlocutor que les permitiera entender lo más significativo y necesario de cada tema visto, pero sobre todo que al observarlo se acordaran y aplicaran lo visto en clase.

Toda la experiencia adquirida al ser analizada, se jerarquizó y se re-diseño para que en las clases la consigna fuera el realizar actividades con diferentes tipos de material didáctico, con cajas de cerillos para explicar las series geométricas, con geoplanos para mostrar áreas y perímetros, con el juego de geometría para realizar trazos sencillos, algunas veces se trabajaba en equipo, otras en parejas y otras de manera individual, pero la intención didáctica era que los sordos manipularan el material y sintieran los conceptos.
Un detalle muy significativo fue que lo que antes era imposible o se consideraba así, se convirtió en un reto pues un alumno sordo (Luis Daniel) ya era normal para él pasar a explicar algún concepto matemático a los alumnos oyentes, lo que a la postre hizo que otra alumna sorda (Tania) se animara a explicar alguna construcción geométrica, con un poco de sarcasmo el director comentaba en las juntas de academia que los que eran considerados "normales" terminaban siendo los conejillos de indias de los alumnos sordos.

El director al observar esta situación se animó a llevarlos a la Escuela Normal Superior de México para que compartieran sus experiencias con alumnos del séptimo semestre de la licenciatura en educación secundaria en especialidad de matemáticas y fue una experiencia muy enriquecedora observar como un alumno con una discapacidad auditiva pasaba al frente y con una seguridad de lo que él había aprendido en sus clases de matemáticas lo compartía a futuros docentes. ¿Algo más? Faltaba la muestra didáctica en la comunidad escolar, así que el director empezó a preparar al grupo para hacer algo que parecería si no imposible, un tanto difícil, sobre todo porque no era sencillo argumentar que un sordo tocaría un instrumento musical, así que se aprovechó la propuesta didáctica del compositor mexicano Julián Carrillo[XVI] para aprender a interpretar melodías sencillas con los primeros números naturales, con la intención de elaborar una orquesta musicomatemática, integrando e incluyendo a ambas comunidades; de sordos y oyentes.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Para sorpresa de los bastantes incrédulos, todas y todos los alumnos lograron interpretar la melodía de las mañanitas, unos con un teclado y otro con la flauta. Fue muy reconfortante mostrar un ejemplo de una inclusión educativa porque se dejó a un lado los pretextos, justificaciones, pero sobre todo; los prejuicios.
La didáctica de la matemática y la inclusión dieron muestra de que si se puede hacer algo diferente.

IV. Conclusiones

"Y tal vez… un abrazo, no sea más que quitarte el peso de tener que mirar siempre detrás de una ventana"

Carlos Skliar

Guy Brousseau (2007) en una tertulia no institucional[XVII] y muy coloquial, le comentaba al director de la secundaria de esta historia y al Presidente de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas en el Distrito Federal que cuando se habla de la didáctica de la matemática, es muy importante que al docente le interese la génesis de cómo se aprende, comentaba que el desarrollo en el aula se puede comprender como el de una película, la cual se nos permite componer no sólo con la mente, sino cuadro a cuadro, creando las condiciones óptimas para un verdadero aprendizaje de las matemáticas, pero tampoco es reconocer el montaje, sino ver las condiciones, poderlas describir y estar muy consciente que conocer la forma de dirigir no es suficiente, hay que saber observar y mirar desde otra perspectiva, pues si se busca describir los hechos de las situaciones didácticas; el docente debe saber observar.

Sin haber realizado una sistematización rígida el docente (directivo) logro que hubiera una interacción de los alumnos sordos con el medio, con el material didáctico, después se logró establecer una señas en común, es decir se empezó a manejar un código específico en forma de propuestas informales o formales desde un emisor que era el estudiante a un receptor, que podrían ser otro compañero o el mismo docente, después los alumnos tuvieron la oportunidad de ir validando la propuesta (las regletas que utilizaban o la misma historieta) dándole la categoría de verdadera o falsa y finalmente el docente (director) logró reunir todos las situaciones anteriores para formalizar un saber matemático que convirtiera en conocimiento.

Al ir compartiendo estas reflexiones, una docente de la asignatura de historia[XVIII] de la secundaria 267 Teodoro Flores después de vivir, sentir y observar como la autoridad educativa dejaba morir el proyecto de la escuela con decisiones hasta arbitrarias y fuera de contexto educativo, mencionaba: "el problema en los documentos institucionales es que se pondera la inclusión, pero siempre como discurso y no como una realidad que brinde las condiciones adecuadas para el desarrollo y aprendizaje de estudiantes con discapacidad y el ejemplo fue más que contundente, la secundaria 267, ahora ya existe una unidad de UDEEI, pero no hay proyecto que enriquecer, ya no hay alumnos sordos, no hay ni siquiera un seguimiento de lo realizado por nuestra comunidad académica, aun cuando muchos de nosotros llegamos a escribir y participar en concursos de la SEP que hablaban de experiencias exitosas en integración educativa o de diferentes formas de enseñar y aprender".

El ego o la soberbia académica que le hizo decir al directivo que en media hora les explicaba el sistema binario, cuando la realidad es que se tardó más de un mes en poder hacer que el alumno sordo le entendiera,[XIX] ya no los conceptos básicos de matemáticas, sino un diálogo cualquiera sin depender de una interprete, tardo un año en poder comunicarse con los alumnos utilizando además de la mímica la lengua de señas mexicana; el director reconoció que la comunidad sorda fue la que le enseñó, la que permitió en un futuro compartir muchas anécdotas, aventuras educativas (desde disfrazarse de magos para hacer un show de cartas, hasta dar una conferencia en una escuela o lograr formar una orquesta musical sin importar quien tocara más bonito o con mejor entonación) tardo en hacerlo más consciente pero el director reconoció que lo más importante era participar, demostrar que no existían discapacidades, que todas y todos eran iguales porque al final, el mismo director era el que tenía problemas por pensar de forma diferente, por imaginar que la inclusión va más allá de una terminología oficial, situación que le trajo desde represalias institucionales como discordias entre sus mismos compañeros directivos, por no ser institucional y disciplinado, pero pareciera que era más por mostrar que si se puede lograr cuestiones educativas y no institucionales.

Se convirtió en una especie de "vagabundo educativo" porque de ser director, paso a ser apoyo técnico pedagógico[XX], después regresó como subdirector (un tiempo de pedagógico y ahora administrativo) y en su escuela[XXI] actual llegaron otros sordos, pero las condiciones fueron diferentes, porque ahora se tuvo que convencer a los directivos de educación especial para que les dieran oportunidad de trabajar a los alumnos Sordos en una escuela regular y no enviarlos a una secundaria de un Centro de Atención Múltiple, se confirmó otra vez; la inclusión como discurso institucional no como realidad educativa.

En una comunidad educativa si se le da la oportunidad de trabajar a los docentes de matemáticas con grupos heterogéneos (partiendo de una diversidad) en un mediano plazo (no corto) se podrán dar cuenta que entre la misma comunidad se capacitan con bastante eficacia, sobre todo con los que están empezando a comprender algún concepto nuevo porque se les permiten observar varios y diversificados modelos de otras estrategias de solución, pero nada de eso servirá si no se les da la oportunidad de compartir esos errores, esos imprevistos o simplemente ese gusto por estar motivado a trabajar con alguien que es diferente a él.

El directivo sigue convencido que al hablar de inclusión, va más allá de cualquier terminología oficial, va directamente a la parte emocional del docente o comunidad académica, pero ahora después de varios tropiezos y aciertos está consiente que el trabajar con alumnos que presentan alguna discapacidad no puede ser en forma de resignación o conmiseración por tenerlo en el aula, sino como una forma de aceptación en todos los ámbitos, tanto emocionales, físicos, morales y educativos.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Agradecimientos

A esos alumnos sordos, hipoacusicos, ensordecidos y a sus padres que han servido de ejemplo de vida por enseñar a sobrevivir en un sistema educativo y sociedad que no está preparada para convivir con la discapacidad o simplemente con el que no piensa igual que los demás.

Citas

[I] Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares el propósito es generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes en los temas evaluados.

[II] El diccionario español-lengua de Señas Mexicana, estudio introductorio al léxico de la LSM, DEE, (2004) señala que entre las personas Sordas se hace la distinción de la palabra Sordo (con letra inicial mayúscula) para referirse a los miembros de la comunidad, mientras que la palabra sordo (con inicial minúscula) se refiere al término médico.

III El término burocracia proviene del francés bureaucratie, cuya raíz es bureau ("oficina") http://definicion.de/burocracia/#ixzz4IYf6zU2y, accedido el día 10 de agosto del 2016.

[IV] La invisibilización es un concepto ampliamente utilizado en las ciencias sociales para designar una serie de mecanismos culturales que lleva a omitir la presencia de determinado grupo social. El CONAPRED afirma que si no se transforma la cultura para que sea receptiva la diversidad, si no se toma consciencia sobre la importancia, difícilmente se podrá consolidar una sociedad democrática y justa.

[V] Para la SEP el término significa la restricción o ausencia relacionada con alguna deficiencia del individuo, de naturaleza permanente o temporal para el desempeño del rol que satisface las expectativas del grupo social al que pertenece. Para el Consejo Nacional para Prevenir la Discriminación (CONAPRED) con base en la convención sobre los derechos de las personas con discapacidad es un concepto que evoluciona y que resulta de la interacción entre las personas con deficiencias y las barreras debidas a la actitud y al entorno que evitan su participación plena y efectiva en la sociedad en igualdad de condiciones con las demás.

[VI] Desafortunadamente estos términos son muy utilizados en las escuelas en el discurso, pero poco aplicables en la realidad, pues la igualdad tiene que ver con aspectos relacionales y no con rasgos distintivos de las personas. La equidad es un principio de justicia que tiene como punto de partida el reconocimiento de las diferencias que existen en todas las personas; la equidad reconoce que no se puede tratar igual a personas que son diferentes pues al hacer esto generaría un acto de discriminación.

[VII] Una muestra de esta situación fue cuando al presentarse en un evento educativo institucional que hablaba de inclusión educativa, hablo de sus experiencias con alumnos con discapacidad cuando era director y no mencionó el trabajo realizado por la escuela, ni siquiera el premio a nivel nacional obtenido por la escuela en el 5° Concurso Nacional de experiencias exitosas de integración educativa.

[VIII] La integración hace énfasis en el derecho de cualquier alumno o alumna con Necesidades Educativas Especiales con o sin discapacidad a tener la oportunidad de ser recibido en la escuela regular.

[IX] La inclusión no sólo pretende que los alumnos y alumnas se incorporen a la escuela regular de los diferentes niveles educativos, sino que participen de manera activa, que se sientan parte de su comunidad educativa, sin distinción alguna, con el compromiso, la aceptación genuina, honesta por parte de sus profesores, directivos y compañeros estudiantes.

XX Carlos Skliar comenta que la diversidad es aquello que nos altera, que nos perturba, que irrumpe en nosotros, de allí no sigue que el otro sea una amenaza, un enemigo que debe ser silenciado, ignorado, masacrado.

[XI] Una situación didáctica es parte de una secuencia didáctica, ésta tiene por objetivo llevar los saberes de los estudiantes a conocimientos institucionalizados.

[XII] La comunidad Sorda llegó acompañada de una Intérprete de Lengua de Señas Mexicana, la Profesora María Isabel Cristina Ruiz de Chávez, con especialidad de pedagogía. Ella era la encargada de apoyar a los alumnos en sus tareas y de traducir las clases en el horario escolar.

[XIII] Los alumnos visuales aprenden mejor cuando leen o ven la información de alguna manera, esto último se aprovechó con los alumnos Sordos.

[XIV] Bajo la teoría de las situaciones didácticas, la didáctica debe facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje por lo tanto el material es lo tangible, es el recurso, es la estrategia mediante el cual se manipula el material didáctico para facilitar la adquisición de algún concepto matemático.

[XV] Los dibujos eran diseñados por el director aprovechando su propuesta de tesis de licenciatura, la historieta como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje agradable de la matemática recreativa.

XVI La obra musical llamada Sonido 13 está regida por tres fundamentos: Enriquecimiento, Simplificación y Purificación de la música, la Simplificación consiste en el empleo de números en lugar de notas musicales para designar los sonidos ya mencionados. Con la Simplificación, se demuestra con ello que las obras de los más grandes maestros de la música pueden ser modificadas por medio de la numeración para que cualquier persona pueda interpretar, con sólo conocer los números, cualquier obra musical, por complicada o sencilla que esta sea.

XVII El Dr. Guy Brousseau visitó México y con el Profesor Francisco Miguel Yañez Pichardo, presidente de la ANPM DF en Agosto 2007 lo fuimos a recibir al aeropuerto de la ciudad de México y en una charla compartió sus ideas y conceptos de la teoría de las situaciones didácticas.

XVII Ahí decidió documentar sus experiencias con los alumnos Sordos como profesor-director y volvió a ganar una mención honorifica a nivel nacional en el 8° Concurso Nacional de Experiencias Exitosas de Integración Educativa, siendo lo más divertido recibir el premio por parte del presidente de CONAPRED Ricardo Bucio. Aun cuando la autoridad educativa de Iztapalapa (DGSEI) no estaba enterada hasta que salió publicada la entrega en la página de la SEP y el CONAPRED.

XVIII La profesora Olivia Morales Castillo, la interprete María Cristina Ruiz de Chávez, el subdirector-director Erick Solís Hernández y otros 9 docentes de la escuela presentaron sus experiencias con los alumnos Sordos y ganaron una mención honorifica a nivel nacional en el 5° Concurso Nacional de Experiencias Exitosas de Integración Educativa, el reconocimiento fue entregado por el entonces secretario de Educación Pública Alonso Lujambio.

XVIII En esta escuela decidió ya no involucrarse tanto con las formas de enseñanza y aprendizaje de la matemática con los alumnos, sino busco la manera de sensibilizar a la comunidad y apoyarlos de manera técnico pedagógica. Ante la falta de profesores de matemáticas solicitó atender los grupos y el director Jesús Isauro Manzanilla Rebolledo lo apoyó en todo momento, así que puso en marcha la historieta y las estrategias utilizadas con la comunidad de Sordos para mostrar ahora que si se diversifican las situaciones didácticas no sólo se beneficia a un alumno con discapacidad, sino a todos los alumnos.

REFERENCIAS

[1] Ann Tomilson. ; El aula diversificada, biblioteca para la actualización del maestro, SEP. (2003)

[2] Belén Domínguez, Alonso Baixeras La educación de los alumnos sordos hoy, perspectivas y respuestas educativas, Ediciones Aljibe. (2004)

[3] Cedillo, Escalante, Escandon et al.; La integración educativa en el aula regular, principios, finalidades y estrategias. SEP, Subsecretaria de Educación Básica y Normal. (2000)

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

[4] Echeita, Gerardo.; Educación para la inclusión o educación sin exclusiones, Capítulo 1, La "educación Especial" a examen: definiciones y respuestas, en Editorial Narcea. (2006)

[5] Erick Solís. ; La historieta como recurso didáctico en la enseñanza recreativa de las matemáticas en la escuela secundaria, Tesis para obtener el título de licenciado en educación secundaria, pp. 53-58, SEP, Escuela Normal Superior de México. (2004)

[6] Fuenlabrada, Irma.; La didáctica, los maestros y el conocimiento matemático, Documento DIE 43, CINVESTAV. (2001)

[7] Gardner, Howard.; La Educación de la Mente y el Conocimiento de las Disciplinas, Editorial PAIDÓS. (2000)

[8] Guy Brousseau. Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal.(2007)

[9] Magnus, Hans. ; El diablo de los números, Editorial Siruela, (1997).

[10] Márquez, Ángel La enseñanza de las matemáticas por el método de los números en color, Editorial el ateneo. (1970)

[11] Martínez, V.R.; Algunas consideraciones sobre matemáticas y creatividad. Ciencia, revista de la academia mexicana de ciencias, 4, 4-14. (2005, oct-dic, 56)

[12] Olivia Castillo. ; ¿Para qué cambiar? capítulo IV relatos de la experiencia pedagógica en educación secundaria en Diferentes formas de enseñar, diferentes formas de aprender, experiencias pedagógicas de docentes de escuela de tiempo completo, pp. 173-179 .(2013)

[13] Rubia, Francisco. ; ¿Qué sabes de tu cerebro?, editorial Temas de Hoy. (2006)

[14] SEP Acuerdo 592 por el que se establece la articulación de la educación básica. México: Secretaría de Educación Pública. (2011)

[15] SEP Educación Inclusiva, dirección de educación especial. Programas de escuelas de tiempo completo en el distrito federal. (2013)

[16] SEP Modelo de atención de los servicios de educación especial, Dirección de educación especial, MASEE, 2011. (2011)

[17] SEP Módulo IV Guía para facilitar la inclusión de alumnas y alumnos con discapacidad en escuelas que participan en el programa escuelas de calidad. Dirección general de desarrollo de la gestión e innovación educativa de la subsecretaria de educación básica en coordinación con el banco mundial. (2010)

[18] SEP Programa general de trabajo 2008-2012, dirección de educación especial, Administración Federal de Servicios educativos en el DF. (2009)

CAPÍTULO 6

"EL CURRÍCULO EN LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS"

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Diseño de reactivos integradores. Una reflexión y necesidad de los docentes de Ciencias Básicas

Fidel Morales Couoh, Alvaro José Leal Osorio, René Aarón Canché González y Ricardo Yam Ucán
Instituto Tecnológico Superior del Sur del Estado de Yucatán, Oxkutzcab, Yucatán, México
hocaba-fidel@hotmail.es, lealvaro90@yahoo.com.mx, reneglez81@hotmail.com,
ricardoyam1978@hotmail.com

***Resumen*- En este trabajo presentamos avances de nuestra investigación que inicia a raíz de la solicitud hecha a los docentes del Instituto Tecnológico Superior del Sur del Estado de Yucatán involucrados en el Evento Nacional de Ciencias Básicas para la elaboración y diseño de reactivos bajo el enfoque de competencias, y que en su solución utilicen competencias de las diferentes disciplinas (Física, Química y Matemáticas). Es claro, que si bien los libros de texto ofrecen una estructura lógica y coherente de los temas, éste se limita a la demostración de propiedades, teoremas y ejercitación de algoritmos, a los cuales, a posteriori, se le busca alguna aplicación. De ahí que nuestro problema de investigación consiste en la ausencia de actividades didácticas que involucran tal enfoque, ésta responsabilidad se le deja al docente quien por lo general considera las actividades propuestas en los textos o bien, las diseña conforme a su criterio.**

***Palabras Clave*- Actividades Didácticas, Ciencias Básicas, Competencias, Reactivos, Resignificación.**

Abstract- This paper present advances of our research started following the request made to teachers of Higher Technological Institute of the South of the State of Yucatan involved in the National Event of Basic Sciences for the development and design of reagents under the competence approach, and in its solution using skills from different disciplines (Physics, Chemistry and Mathematics) . It is clear that while textbooks provide a logical and coherent structure of the subjects , it is limited to the demonstration of properties, theorems and exercise algorithms , to which , in hindsight , you are looking for an application . Hence our research problem is the lack of educational activities involving such an approach , this responsibility is left to the teacher who usually considers the activities proposed in the texts or the design according to your criteria.

Keywords- Teaching activities, Basic Science, Competency, exercises, resignification.

I. Introducción

Es común escuchar en pláticas de pasillo, tanto a docentes como estudiantes y público en general, sobre "un buen estudiante" o "un buen profesor" en alguna asignatura de ciencias básicas: Física, Química y Matemáticas (FQyM); sin embargo, este tipo de acepciones es relativo. Por ejemplo, cuando un estudiante "reproduce" los algoritmos y las fórmulas expuestas por el docente en la cátedra para la resolución de alguna actividad, el profesor pudiese catalogar al joven como un buen estudiante; o bien, se puede pensar que un buen docente es aquel que ofrece "detalle a detalle" la forma del cómo aplicar un listado de fórmulas, las cuales conllevan a una series de secuenciaciones lógicas y coherentes de algoritmos, "sin mayor dificultad". Éste tipo de escenarios nos lleva a pensar que toda la responsabilidad de lo bueno o malo de la educación recae únicamente en el alumno y el profesor, pero no así, se cuestionan la "forma" del conocimiento.

II. Problemática

Nuestra reflexión nos llevó a la revisión de los planes y programas de estudio de las asignaturas de ciencias básicas (FQyM), en el pudimos constatar que en estos documentos se sigue una secuenciación semejante a la presentada en los libros de textos con gran influencia escolar, este hecho puede ser cristalizado mediante la revisión de cualquier plan o programa de estudio y las fuentes bibliográficas que en ellos se sugieren. Así mismo, conviene señalar que los planes de estudio que rigen al Tecnológico Nacional de México (TecNM), están basados en competencias profesionales. Este hecho nos llevó a los siguientes cuestionamientos: ¿cómo los libros de texto con cierta metodología responden a los planes de estudio del TecNM?, ¿existen libros de ciencias básicas basados en competencias?, ¿dónde podemos encontrar reactivos (ejercicios) integradores?, ¿cuál es el referente de un reactivo integrador?, ¿qué tipo de reactivos se tendrán que diseñar?, ¿cuál es el modelo a seguir?. Conviene señalar que dichos cuestionamientos no hubieran surgido en el comité de ciencias básicas del Instituto Tecnológico Superior del Sur de Estado de Yucatán (ITSSY), si los docentes no tuvieran que diseñar de reactivos integradores para el concurso nacional de ciencias básicas del año 2014.

Lo anterior, nos hizo buscar información sobre el modelo de competencias, este hecho, llevó a un gran número de docentes a acreditar el "Diplomado para la Formación y desarrollo de Competencias Docentes" en el año 2015. Sin embargo, poco nos decía sobre la elaboración y diseño de reactivos integradores.

Con base a lo anterior, nuestro problema de investigación consiste en la ausencia actividades didácticas bajo el enfoque de competencias. Empero, conviene señalar lo siguiente, los docentes de ciencias básicas están convencidos que en el diseño de un reactivo integrador no puede excluirse a las matemáticas. En este sentido, nuestra investigación se centra en las matemáticas.

III. Antecedentes

Una competencia se entenderá, de acuerdo a la Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación (DGESPE), ahora TecNM, a la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

específico [1]. Es decir, podemos considerar como competencia al desempeño que resulta de la movilización de conocimientos (saber), actitudes y valores (saber ser), así como de sus habilidades, capacidades y experiencias que realiza un individuo en un contexto específico, para resolver un problema o situación que se le presente en los distintos ámbitos de su vivir de acuerdo al conocimiento adquirido (saber hacer).

Bajo el encuadre anterior, podemos pensar que el conocimiento de la escuela anclada a cierta epistemología matemática, está al servicio de otros dominios no matemáticos. Por tanto, entender que la matemática escolar del nivel superior está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, las cuales permiten que el conocimiento adquiera sentido y significación [2]. Sin embargo, este hecho, conlleva a una reflexión más profunda sobre la matemática escolar presente en el nivel superior. En este sentido, si bien el enfoque bajo competencias considera las habilidades y actitudes del ser humano en Ingeniería, estas habilidades y actitudes hacen referencia a la construcción del objeto matemático, ya que el énfasis recae fuertemente en las secuenciaciones lógicas y coherentes de conceptos, definiciones, formular y algoritmos de solución tratando de ofrecer con ello exactitud y formalismo, a los cuales, a posteriori, se le busca alguna aplicación [3]. Éste hecho, puede ser cristalizado al revisar cualquier libro de texto (dado como referencia bibliográfica) en las planeaciones de los docentes, incluso, en los portafolios de evidencias de las asignaturas de FQyM.

Lo anterior quizá explique, al menos en parte, los resultados obtenidos por los estudiantes en el evento nacional de ciencias básicas, ya que el tipo de reactivos que se presentan en este evento involucran competencia de asignaturas de FQyM; es decir, reactivos que su solución utilicen competencias de al menos dos disciplinas de ciencias básicas. Empero, ¿los docentes proponen reactivos integradores?, ¿dónde podemos encontrar este tipo de reactivos?. Si bien, en cada periodo intersemestral, los docentes asisten y participan en cursos de capacitación y actualización sobre el enfoque de competencias poco o nada nos dice sobre el diseño de actividades didácticas. En este sentido, toda esa responsabilidad se le deja al docente, que en el mejor de los casos considera las actividades propuestas en los libros de texto o bien, las diseña conforme a su criterio. Sin embargo, cada ingeniería tiene distintas intenciones profesionales, distintas formas de estructurar los conocimientos y los objetivos de aprendizaje y por tanto, distintas necesidades en relación a las matemática [4].

Los programas de estudio de las asignaturas de FQyM, mejor conocidos como asignaturas de tronco común, abarcan un período de dos años. Asimismo, en los años siguientes se contemplan asignaturas relacionadas con su "formación disciplinar" donde el alumno adquiere las herramientas propias de su ingeniería que responden a necesidades propias de la vida. Conviene señalar que la mayoría de los programas de estudio para las asignaturas de matemáticas, son utilizados indistintamente en las diferentes ingenierías del ITSSY. Favoreciendo así, el hecho de contemplar a las matemáticas, como un conjunto de secuenciaciones lógicas y coherentes de conceptos, definiciones, formular y algoritmos de solución, a los cuales, a posteriori, se le busca alguna aplicación [3]. Sin embargo, hemos observado que los docentes siguen fielmente la estructura que se presenta en los libros de texto para la impartición de sus cátedras. En este sentido, el discurso empleado en los libros de texto es el que norma las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior.

Si bien es indiscutible que los libros de texto ofrecen una estructura lógica y coherente de los temas, éste se limita a la construcción de conceptos para brindar exactitud y formalismo [3], poco o nada nos dicen sobre las competencias que se pueden encontrar en cada una de las actividades propuestas en cada una de las diferentes disciplinas, toda esa responsabilidad, se le deja al docente, que en el mejor de los casos considera las actividades propuestas en los libros de texto para el área de ciencias básicas o bien, las diseña conforme a su criterio.

IV. Estado del Arte

El enfoque de competencias es algo relativamente nuevo si lo referenciamos como modelo educativo adoptado por el TecNM. Sin embargo, pudimos constatar, mediante la revisión de los portafolios de evidencias, que las actividades propuestas actualmente por los docentes de matemáticas no incitan a un conocimiento capaz de responder a las necesidades de desarrollo de nuestra sociedad, ya que éstas son para redundar procedimientos y algoritmos. Tales propuestas olvidan aquellas prácticas y experiencias del ser humano que ante situaciones específicas permitieron y permiten que el conocimiento se trate con cierta naturalidad, desde su génesis epistemológica [5]. Por ejemplo, la derivada, cuyos orígenes están relacionados a problemas de movimiento no son considerados en el discurso escolar sino hasta las aplicaciones [6]. Creemos que el considerar en los diseño de las actividades didácticas las prácticas de graficación-modelación, las prácticas predicción o las prácticas sociales de la analiticidad de funciones [5], conllevarán necesariamente al desarrollo de las competencias en las ciencias básicas, ya que las nociones anteriores fueron fundamentales en la epistemología del conocimiento.

Contemplar aquellas situaciones que en la génesis del conocimiento permitieron que el conocimiento sea manejado con cierta naturalidad, en un ambiente fuera de formalismos en donde el conocimiento lo obtiene el humano a través de su práctica y experiencia [6]. Aquello que normó la construcción del conocimiento, la aproximación Socioepistemológica, la llama prácticas sociales.

Lo anterior se deriva ya que algo no difícil de apreciar en los docentes es la fidelidad que se le otorga al (los) libro(s) de texto para la impartición de sus cátedras. En este sentido el discurso empleado en textos son los que norman las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las ciencias básicas, donde lo "único" importante es el "aprender" un listado de fórmulas, métodos y algoritmos de solución, a los cuales, a posteriori, se les busca alguna aplicación [3]. De esta forma, los diseños de las actividades didácticas deberán crear escenarios en el cual el estudiante puede construir argumentos y significados con base en sus prácticas y experiencias dada una situación usual. Estas prácticas y experiencias, la aproximación Socioepistemológica las ha clasificado en tres grupos: predicción, analiticidad de funciones y modelación-graficación (véase Fig. 3) [5].

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Para hacer del conocimiento un conocimiento funcional capaz de responder a las necesidades de la vida, se tendrá que reflexionar sobre la estructura de los diseños de actividades didácticas bajo el enfoque de competencias. Estos diseños deberán contemplar aquellas situaciones que en la génesis del conocimiento permitieron que el conocimiento sea manejado con cierta naturalidad [6]. De esta forma, los diseños de las actividades didácticas crearán un escenario en el cual el estudiante puede construir argumentos y significados con base en sus prácticas y experiencias dada una situación usual.

Lo anterior fortalece lo señalado en [1], cuando hace referencia a que el conocimiento que adquiere el estudiante o egresado de nivel superior al término de su proceso formativo deberá responder a contextos, situaciones o problemas de ingeniería. Sin embargo, se tendrá que reflexionar sobre el modelo empleado en la educación superior, ya que éste centra su atención hacia los conceptos ignorando de alguna manera que la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos, como las de una ingeniería, y de otras prácticas de referencia, como la de un ingeniero, ajenas a la actividad matemática que permiten y permitieron que el conocimiento adquiera sentido y significación [2].

Trabajos de investigación de los últimos 20 años, han considerado como premisa fundamental aquellos escenarios. Por ejemplo, en [7], se señala que las dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario en las áreas de ciencias e ingenierías se debe a la manera en que se selecciona, articula y organiza el saber matemático con fines didácticos y no a causas de orden pedagógico o técnico al momento de transmitir conocimientos, satisface así, al qué enseñar y no al cómo enseñar. Su trabajo da cuenta del rediseño del currículum y su discurso didáctico en torno a aquello que fue indispensable en la génesis de las ecuaciones diferenciales por ejemplo, la noción predicción y no así la noción aproximación comúnmente abordada en los libros de texto. Asimismo, en [5], se hace ver que el modelo basado en conceptos, no crea marcos de referencia que resignifiquen el conocimiento, no hace de la matemática un conocimiento funcional, ya que soslaya lo humano y a los sentidos de todo saber científico. En este sentido [3], centran su atención en el uso de las gráficas ante la situación de transformación del sistema masa-resorte-amortiguamiento para confrontar nociones Eulerianas (sobre función y continuidad) y el comportamiento de la curva de movimiento que genera el sistema masa-resorte-amortiguamiento para resignificar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales de segundo orden de coeficientes constantes

$$ay''+by'+cy=F(x) \qquad (1)$$

con $y(0)=A$, $y'(0)=B$ y $F(x)$ continua a trozos. Las resignificaciones que los estudiantes adquieren son normadas por los patrones de comportamiento de la curva de movimiento de la masa atada en el resorte, desde esta perspectiva las gráficas no son consideradas como la representación estricta del concepto de función. Investigaciones referidas al diseño de actividades didácticas basadas en la modelación para los ingenieros en formación, sugiere integrar tres enfoques en el diseño de actividades didácticas: por un lado, el uso de los modelos visto desde la práctica y el modelo praxeológico extendido para describir el tránsito de las praxeologías, por último la teoría APOE para dar cuenta de la comprensión de los conceptos matemáticos [4].

Con lo anterior, podemos asumir que se ha ido nutriendo el hecho de cambiar el paradigma tradicional de enseñanza, la cual centra su atención al objeto matemático. Empero, no estamos diciendo que los conceptos no son valiosos para el conocimiento matemático, sino por el contrario, no hay que olvidar aquellas situaciones que permitieron que el conocimiento surgiera y sea manejado con cierta naturalidad, en un ambiente fuera del formalismo (matemático) en donde el conocimiento lo obtiene el humano a través de sus práctica y experiencias [6]. Por ello, las dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario en las áreas de ciencias e ingenierías se debe a la manera en que se selecciona, articula y organiza el saber matemático con fines didácticos y no a causas de orden pedagógico o técnico al momento de transmitir conocimientos [7].

V. MARCO TEÓRICO

La aproximación Socioepistemológica ha logrado reconocer una permanente confrontación entre la obra matemática y el discurso matemático escolar, ya que la construcción de la primera son referidas a objetos explícitos propios de su actividad matemática, mientras para el segundo apunta hacia categorías implícitos propias de la actividad humana [5]. Asimismo [3], señalan que lo verdaderamente importante en el curso de matemáticas es el "aprender" un listado de fórmulas y métodos, hecho que conlleva a un estatus utilitario de la matemática y no a un conocimiento que transforme al individuo y su realidad, debido a que los modelos empleados en el nivel superior para la enseñanza y aprendizaje de la matemática han estado fuertemente anclados en los conceptos, situación que se limita a la construcción del objeto y no "aquello" (la práctica social) que obliga a construirlo [5].

Asimismo, la aproximación Socioepistemológica señala que proveer métodos y algoritmos eficientes, conlleva en el mejor de los casos, a un buen desarrollo de los procedimientos analíticos o algebraicos de los conceptos. Para dar cuenta de la afirmación anterior presentamos la reflexión hecha en [3], esta surge cuando se le pide a un grupo de alumnos y profesores del nivel superior anticipar la solución gráfica de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constante

$$y''(t)+2y'(t)+5y(t)=\begin{cases}1 & si \quad 0\le t<7\\ 0 & si \quad x\ge 7\end{cases} \qquad (2)$$

con $y(0)=0$, $y'(0)=1$, la mayoría de los participantes no pudieron dar una respuesta sin antes recurrir a resolver "analíticamente o algebraicamente" mediante métodos y algoritmos la ecuación diferencial. Nadie reconoció que la solución gráfica de una ecuación diferencial subyace de la misma ecuación, ni mucho menos reflexionó con respecto al comportamiento de la solución de la ecuación diferencial según la función (continua a trozos). Asimismo, en el año 2005 el Dr. Francisco Cordero llevo a cabo en las instalaciones del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN) la siguiente experiencia: se cuestiona a alumnos e

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

incluso profesores sobre los signos de A, B y C de la función

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (3)$$

si su gráfica es dada en la figura 1.

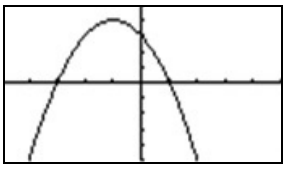


Fig. 1. Grafica de una función cuadrática.

Con ambos ejemplos, se puede cristalizar el hecho de que las gráficas en el nivel superior son "vistas" y tratadas como la representación estricta del concepto de función. Por tanto, proveer al estudiante de métodos y algoritmos eficientes, conlleva en el mejor de los casos, a un buen desarrollo de los procedimientos analíticos o algebraicos de los conceptos. Sin embargo, no hay que olvidar que la matemática de la escuela no existiría si éste conocimiento no fuera un modelo aceptable de alguna realidad, como entidades físicas, y no ayudaría a tratar problemas empíricos, y que antes de consolidarse como conocimiento escolar son sin duda una organización de prácticas sociales, prácticas como aquellas del saber cultural, saber instrumental, saber escolar, saber tecnológico [8], que permitieron y permiten que ese conocimiento se desarrolle y se resignifique.

En cuanto al rediseño del currículum y su discurso didáctico realizado en [7], se formula una propuesta didáctica, tomando como idea central a la noción de predicción, rompiendo con ello la centración hacia la noción de aproximación, comúnmente adoptada en los libros de texto para referirse a la serie de Taylor al momento de resolver una ecuación diferencial de coeficientes constantes con condiciones iniciales dadas. Su reflexión radica en que la ecuación diferencial es quien provee información sobre las condiciones que debe cumplir la solución. Es decir, si se conoce un estado inicial $f(x_0)$ y la forma que varía en ese instante $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, etc., entonces el objetivo consiste en predecir el estado vecino o futuro con los datos que inicialmente se poseen (véase Fig. 2).

Esto es:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + f''(x_0)\frac{h^3}{3!} + \ldots \quad (3)$$

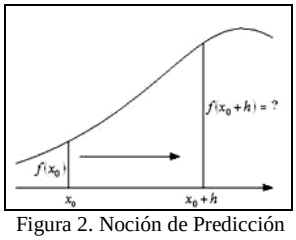


Figura 2. Noción de Predicción

Lo anterior conlleva al rediseño del discurso matemático escolar del nivel superior, debido a que los modelos empleados por la educación matemática en ese nivel han estado fuertemente anclados en los conceptos. De esta manera, una vez que se identifiquen las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático requieren ser reinterpretadas para ser integradas al sistema didáctico. Dichas prácticas requieren de la intencionalidad (de reproducción en el sistema didáctico) para que se desarrollen en las condiciones del sistema. Para ello, se construye la situación donde la práctica se transforma en la argumentación, como el eje o núcleo para generar el conocimiento matemático que responda a la situación (véase Figura 3) en [5]. Para satisfacer tal propósito y reproducirlo en el sistema educativo se requiere de una estructura teórica que señale una mecánica. La aproximación Socioepistemológica pretende cumplir con tal cometido al incorporar en forma sistémica las dimensiones, epistemológica, cognitiva, didáctica y social como cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento [8].

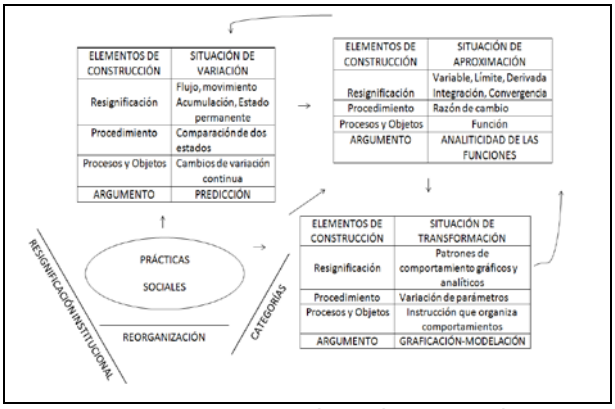


Figura 3. Socioepistemología del cálculo y el Análisis

VI. A MANERA DE CONCLUSIÓN

Para el diseño de actividades didácticas se tendrá que considerar aquellas situaciones que permitieron que ese conocimiento surgiera y que propició que se manejara con cierta naturalidad, en un ambiente fuera de formalismos en donde el conocimiento lo obtiene el ser humano a través de su práctica y experiencia [6]. Lo anterior favorecerá un conocimiento funcional en el estudiante a la luz de los usos de las gráficas, por lo que el diseño de las actividades didácticas implicará trastocar al conocimiento mismo y por ende las prácticas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Una de las características que observamos y apreciamos en los docentes involucrados en el estudio es la fidelidad que se le otorga al (los) libro(s) de texto para la impartición de sus cátedras. En este sentido, el discurso empleado en el libro de texto, norma las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las ciencias básicas. Por ello, es necesario hacer estudios de investigación sobre el diseño de actividades didácticas y la forma en que las competencias pueden ser cristalizadas a partir de ellas. En este sentido, creemos que considerar en los diseños de las actividades didácticas las prácticas de graficación-modelación, o las prácticas predicción o las prácticas sociales de la analiticidad de funciones como señala en [5], conllevaran necesariamente al desarrollo de las competencias en las asignaturas de matemáticas consideradas en ciencias básicas, ya que tales nociones (no propias de la actividad matemática) fueron fundamentales en la epistemología del conocimiento escolar.

El diseño de actividades didácticas normadas por las prácticas de graficación-modelación, predicción y las prácticas sociales de la analiticidad de funciones, conllevan al

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

desarrollo implícito de las competencias en nuestros futuros ingenieros, haciendo del conocimiento un conocimiento funcional, capaz de responder a las necesidades de la vida, incorporándose orgánicamente transformando al individuo su realidad [5] y [6], dando sentido y significación a las ciencias básicas. Lo anterior fortalece lo señalado en [1], cuando hace referencia a que el estudiante o egresado de nivel superior es capaz de hacer al término de su proceso formativo, ya que el conocimiento que adquiere debe responder cada contexto determinado y para una serie de situaciones o problemas específicos.

El diseño de las actividades didácticas con base a las investigación Socioepistemológicas, nos incitan a entender a la graficación como una práctica social y no como la representación estricta del concepto de función, ya que soporta el desarrollo de razonamiento y de la argumentación, siendo igual de validas que los realizados con la estructura formal de la matemáticas [3]. Esto es, la práctica de graficación resignifica el conocimiento matemático, resignificación que puede verse cristalizada en las intervenciones de los participantes ante situaciones específicas para inferir cierto patrón gráfico deseado, así que para poder inferir sobre un tipo de comportamiento de cierto tipo con respecto a otro (en esa situación de movimiento), se tendrá que hacer ajustes y las modificaciones necesarias al sistema, todo ello como resultado de los patrones de comportamiento. La resignificación será entendida como la construcción del conocimiento mismo ante una situación específica, favoreciendo en el estudiante un conocimiento funcional, y mediante el uso de la práctica de graficación se propicié que el conocimiento se constituya como una herramienta para resolver preguntas en otros momentos de su vida, dentro y fuera de la escuela [5].

VII. Diseño de Reactivos Integradores

A continuación se presentan algunos reactivos propuestos pensando las observaciones antes señaladas por [5], y que han sido considerados para los concursos de ciencias básicas en la "etapa local en línea" del año 2014 y 2016. El primero, lo encontramos en [9]; mientras que el segundo, fue de nuestra propia autoría. Conviene precisar que las competencias que se señalan en cada uno de los reactivos fueron consensadas por los docentes de ciencias básicas, considerando los programas de estudio de las asignaturas de ciencias básicas de FQyM.

Reactivo 1.- Un automóvil viaja durante la noche por una carretera en forma de parábola, con su vértice en el origen. El auto parte de un punto $100m$ en el Oeste y $100m$ al Norte del origen y viaja en dirección Este. Hay una estatua ubicada $100m$ al este y $50m$ al norte del origen. (Véase Fig. 4). ¿En cuál punto de la carretera los faros del automóvil iluminará la estatua?

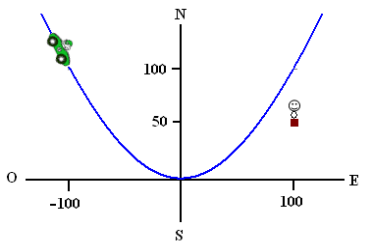


Figura 4. Posición del móvil respecto a la estatua

Competencias presentes

*Aplica los conceptos básicos y leyes de la dinámica en el modelado y la solución de problemas.

*Analiza utilizando cálculo diferencial problemas con aplicación en ingeniería que pueden representarse como una función de variable real.

Reactivo 2.- De una partícula que se mueve en línea recta se logró obtener mediante un sensor de velocidad la siguiente información gráfica (véase Figura 5). Se sabe que en un principio ($t = 0$) la partícula estaba a 7 unidades del sensor.

a) Determine la posición del objeto con respecto al sensor en el segundo 2.

b) Determine la distancia recorrida por el objeto desde el principio (t=0) hasta el segundo 9.

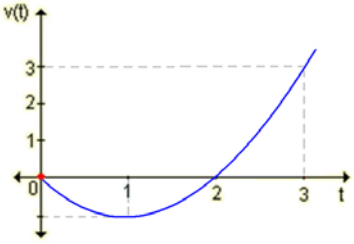


Figura 5. Gráfica velocidad de la partícula

Competencias presentes

*Modela utilizando cálculo diferencial problemas con aplicación en ingeniería que pueden representarse como una función de variable real.

*Aplica los conceptos básicos y leyes de la dinámica en el modelado y la solución de problemas.

*Analiza utilizando cálculo integral problemas con aplicación en ingeniería.

Glosario

Reactivo Integrador: Reactivo o ejercicio que en su solución utilice competencias de las diferentes disciplinas (FQyM).
Competencia: Es la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico. O bien, el desempeño que resulta de la movilización de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que realiza un individuo para resolver situaciones que se le presente en su vivir [1].
Portafolios de evidencias: Información física o digital que evidencia la manera de cómo se logró la(s) competencia(s) especificada(s) planteadas en los planes de estudio.
Intersemestral: Es un lapso de tiempo en el cual el estudiante se encuentra fuera del periodo académico normal, por lo que el docente lo utiliza para capacitarse, ese tiempo se da dos veces al año, en la mitad y al final de año.
Resignificación: Es el uso del conocimiento en la situación específica donde se debate entre su funcionamiento y su forma de acorde con lo que organiza el grupo humano [5].

REFERENCIAS

[1] DEGESPE,(2014). El enfoque bajo competencias. *Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación Referencia* 13/Jul/2014.http://www.dgespe.sep.gob.mx/reforma_curricular/planes/lepri/plan_de_estudios/enfoque_centrado_competencias.

[2] Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, No. 42, 353-369.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

[3] Morales, F. y Cordero, F. (2007). El uso de las gráficas en la confrontación entre la continuidad Euleriana y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 20. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

[4] Vázquez, R. (2013). Diseño de actividades de modelación para la formación matemática de ingenieros: el caso de la UACM. *VII Coloquio de Doctorado en Matemática Educativa*. CICATA, IPN México.

[5] Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. , 265-286.

[6] Parra, T. y Cordero, F. (2008). La derivada como razón de acumulación o agotamiento. En *International Congress on Mathematical Education*.11. México.

[7] Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(1). 25-68.

[8] Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta latinoamericana de matemática educativa*. Clame Vol. 17, Tomo 1.

[9] Stewart, J. (1999).*Cálculo: conceptos y contextos*. Ed. Thomson; Cap. 2; Ej.14. pp. 189.

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Didáctica en la enseñanza de la geometría en educación secundaria.

Ruiz Díaz Arlene[1] y Santiago Rodríguez Itzel[1]
[1]Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201, Col. Exhacienda el Rosario,. México ar_lene_1995@hotmail.com, itzyblue_31@hotmail.com

***Resumen*- En este documento se identificarán dos propuestas didácticas que pueden utilizar en la enseñanza de contenidos geométricos correspondientes al bloque II y V de tercer grado de Educación Secundaria. Se interesa reconocer el sistema que el alumno desarrolló para representar la información, ya que con ello se podrá lograr un aprendizaje significativo. La investigación además se sustentará del modelo de los Van Hiele ya que dependiendo del grado educativo donde nos encontremos es la propuesta curricular, es decir, el tipo de actividades que se presenten deberán realizarse con forme al desarrollo de cada unidad, debido que en el proceso de enseñanza-aprendizaje recibido dependerán en gran medida de las estrategias diseñadas y los materiales utilizados. Así mismo se deberá consolidar, ¿por qué? y ¿para qué? aprender geometría, de esta manera el alumno no perderá el interés y el enfoque que se necesita para cultivar los contenidos en este nivel.**

***Palabras clave*- Geometría, estilo de aprendizaje.**

***Abstract*- In this paper two educational proposals that can be used in teaching content corresponding geometric block II and V of third grade of secondary education will be identified. He is interested acknowledge that the student system developed to represent information, as this may be a more meaningful learning. The research also be supported model Van Hiele because depending on the educational level where we are is the proposed curriculum, is the type of activities that occur must be made to form the development of each unit finger in the process teaching and learning received will depend largely on the strategies designed and the materials used. Also it must consolidate, why? and for what? learn geometry, so the student does not lose interest and focus it takes to grow the content at this level.**

***Keywords*-Geometry, learning style.**

I. INTRODUCCIÓN.

Es de suma importancia consolidar propuestas didácticas para la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria, especialmente nos enfocáremos en alumnos de Tercer grado, en primera instancia se interesa reconocer, ¿Por qué? Y ¿para que aprender geometría? Ya que, si esto no se llega a observar, el alumno perderá el interés y el enfoque que se necesita para cultivar los contenidos y lograr los objetivos esperados, por ello una de las problemáticas que el docente se enfrenta es lograr que el dicente más allá de una simple mecanización llegue aplicarlo a la vida, cuando esto ocurre en el aula todo cobra sentido y la motivación no se pierde que es unos de los factores fundamentales para consolidar los conocimientos.

Para lograr lo anterior, en primer momento se interesa reconocer el tipo de inteligencia que el alumno ha desarrollado, puesto que el mayor problema que se observa en este nivel es el conflicto para aprender geometría, de esta manera se requiere reconocer y explotar las habilidades de cada estudiante, ya que a partir de ello, se diseñará las actividades que se pondrán en práctica en cada sesión. Regader B., (2014) menciona las inteligencias múltiples de Howard Gardner, se ha logrado identificar y definir hasta ocho tipos de inteligencia distintas. Vamos a conocer de manera más detallada cada una de las inteligencias Múltiples:

Inteligencia lingüística: Habilidad para la comunicación oral, escrita, la gestualidad etc. Esta habilidad se pude mejorar con las siguientes actividades que son; escribir un diario de vida donde se expresen sentimientos, escribir ensayos, con el dialogo, y la lectura.

Inteligencia lógico-matemática: Esta inteligencia se vincula en la capacidad para el razonamiento lógico y la resolución de problemas, la rapidez en como lo soluciona es el indicador de cuanta inteligencia tiene.

Inteligencia espacial: Es la habilidad que se tiene de observación, además, puede idear imágenes mentales, dibujar y analizar cada detalle. Aunque se dice que esta inteligencia es innata, se puede mejorar con tareas que impliquen la imaginación espacial como por ejemplo la comparación de dos objetos colocados en diferentes posiciones, esta tarea es la más usual ya que muchas veces lo encontramos en los exámenes de colocación a la educación.

Inteligencia musical: Esta inteligencia está latente en todas las persona ya que Gardner nos menciona que en algunas zonas del cerebro se ejecutan las funciones vinculadas con la interpretación y su composición. Como toda disciplina se puede mejorar y desarrollar, sin embargo los que lo tienen más latente son los capaces de componer sin ningún entrenamiento previo.

Inteligencia Corporal y Cinestésica: Está asociada con la adquisición de conocimientos por medio de la interacción corporal y de movimiento.

Inteligencia intrapersonal: Son personas capaces de controlar sus emociones antes de poder acceder a la toma de decisiones con la reflexión, ya que se tiene un conocimiento bastante amplio sobre los aspectos internos de la manera en que se piensa.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Inteligencia interpersonal: Esta inteligencia nos faculta a la interpretación de gestos, evaluando la capacidad para empatizar con las demás personas. Esto es de suma importancia para los docentes ya que, se obtiene una habilidad para detectar conflictos atendiendo de manera eficaz a los problemas, para mejorar esta inteligencia o desarrollarla en primera instancia se tiene que observar el medio donde se desenvuelven realizando la interrogante ¿Ellos saben algo que yo no lo sepa? o viceversa. A partir de la observación se debe dar más credibilidad a los gestos que las palabras ya que es más difícil mentir de esta manera.

Inteligencia naturalista: Permite categorizar aspectos vinculados a la naturaleza.

Gardner afirma que todas las personas pueden desarrollar las 8 inteligencias, aunque cada individuo destaca más una habilidad que otra. Por este motivo en las aulas se deben ofrecer actividades diseñadas para cada alumno, no obstante la inteligencia más latente en la educación es la lingüística y lógico-matemática generando un conflicto con los estudiantes que tienen desarrollado más otra habilidad, ya que repercute en el aprendizaje generando que sea más complejo adquirirlo, por esto se deben diseñar actividades que nos permitan abarcar por lo menos 3 inteligencias, en el caso de la geometría como lo menciona los Van Hiele la propuesta curricular dependerá de igual medida en el grado educativo donde nos encontramos, es decir, el tipo de actividades que se presenten deberán realizarse con forme al desarrollo de cada unidad, porque en el proceso de enseñanza-aprendizaje recibido será dependiente de las estrategias diseñadas y los materiales utilizados.

Se conoce las diversas inteligencias que nos encontramos en el aula para poder diseñar las actividades didácticas en la geometría se debe tomar en cuenta como se debe enseñar dicha disciplina por este motivo se debe indagar sobre los niveles que se alcanzan en el aprendizaje. Claudi Alsina, (1997) menciona los cinco niveles de conocimiento en geometría propuestos por l os Van Hiele nos hace hincapié en los niveles del 0 al 5, sin embargo nosotros desarrollaremos hasta el nivel 3, debido a que el grado en que nos encontramos se podría llegar cuando menos a ese.

Nivel 0: En este nivel se da la visualización o Reconocimiento ya que los objetos se perciben en su totalidad, por su apariencia física, mediante la observación. No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto, ni reconocen de forma explícita componentes y propiedades.
Nivel 1: Esté nivel ya existe un análisis, se perciben las componentes y propiedades se obtienen tanto desde la observación como de la experimentación, sin embargo no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático

Nivel 2: ordenación o clasificación. Alcanzar este nivel significa que describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren. Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura.

Nivel 3: La deducción formal. En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.
Sabiendo ya los niveles en que la geometría debería enseñarse para obtener un aprendizaje significativo, se pasa a la estructuración de las actividades didácticas que son de suma importancia, ya que dependiendo de estas, será el interés que el alumno adquiera por la materia.
Según el acuerdo 717 por el que se emiten los lineamientos para formular los Programas de Gestión Escolar. La Gestión Escolar es un proceso que busca fortalecer el funcionamiento adecuado de las escuelas, mediante la autonomía institucional; enfatiza la responsabilidad del trabajo en equipo e implica la construcción, diseño y evaluación del quehacer educativo.

Por lo tanto hay que reconocer que las actividades didácticas dependen de varias tecnologías, conociendo varias herramientas, como es el software, lápiz y papel, etc. Que sean materiales que permitan la visualización y el aprendizaje del tema.
Las Tecnologías de la Información y la Comunicación, también conocidas como TIC, son el conjunto de tecnologías desarrolladas para gestionar información. Abarcan un abanico de soluciones muy amplio.
Las posibilidades educativas de las TIC han de ser consideradas en dos aspectos: su conocimiento y su uso.
Es fundamental para introducir la informática en la escuela, la sensibilización e iniciación de los profesores a la informática, sobre todo cuando se quiere introducir por áreas (como contenido curricular y como medio didáctico).

Por lo tanto, los programas dirigidos a la formación de los profesores en el uso educativo de las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación deben proponerse como objetivos:

- Contribuir a la actualización del Sistema Educativo que una sociedad fuertemente influida por las nuevas tecnologías demanda.
- Facilitar a los profesores la adquisición de bases

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

teóricas y destrezas operativas que les permitan integrar, en su práctica docente, los medios didácticos en general y los basados en nuevas tecnologías en particular.

- Adquirir una visión global sobre la integración de las nuevas tecnologías en el currículum, analizando las modificaciones que sufren sus diferentes elementos: contenidos, metodología, evaluación, etc. Capacitar a los profesores para reflexionar sobre su propia práctica, evaluando el papel y la contribución de estos medios al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Finalmente, se considera que hay que buscar las oportunidades de ayuda o de mejora en la Educación exp no; es decir, en todos los entornos y circunstancias que logrando las posibilidades educativas de las TIC sobre la realidad presenta.

El objetivo de la presente comunicación es compartir nuestra experiencia como centro docente en el uso educativo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la Enseñanza Secundaria desde un punto de vista práctico, exponiendo aquellas aplicaciones que hemos desarrollado.

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo. GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas.

Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo.

Su categoría más cercana es software de geometría dinámica.

GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

La experiencia nos muestra que los alumnos responsables y motivados aprenden mucho más con estas posibilidades que sin ellas.

En la educación los materiales tienen una gran relevancia por ser elementos de primer orden en el proceso de enseñanza de los alumnos, de esta manera, es importante la clasificación, selección y utilización de los mismos como indicadores notables sobre la calidad y eficacia de la formación.

Para transformar la escuela es necesario democratizarla y hacer de ella verdaderos centros de participación y ciudadanía. De allí que, el reto es plantear proyectos educativos relacionados no solamente con la organización, sino que se proyecte el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje como una forma de aprender la realidad

En educación cualquier material puede utilizarse como un recurso en el proceso de enseñanza/aprendizaje, pero no todo material se concibe para dicho fin. Multitud de materiales son utilizados en educación básica con fines educativos, al igual que existe un extenso catálogo de materiales que se utilizan con carácter educativo. El uso de las TICs en la educación puede lograr despertar el interés en los estudiantes y profesores por la investigación científica y la posibilidad del mejoramiento de las habilidades gracias a la creatividad, imaginación, investigación, experiencia de los docentes, habilidades comunicativas y colaborativas, son materiales que se adaptan a las necesidades y características de los alumnos con el fin de alcanzar las competencias educativas perseguidas y para un mejor desarrollo mundial de los individuos.

REFERENCIAS

[1] Rodríguez N. 2000. Gestión Escolar y Calidad de Enseñanza. Educere. 4(10):39-46.

[2] García, J. Sánchez, C. Jiménez, A. y Gutiérrez M. (2012) *Estilos de Aprendizaje: un estudio en discentes* (Ed) Revista Estilos de Aprendizaje, 10, Vol 10

[3] Cárdenas, A. L. (1992) *Presente y futuro de la educación*. Editorial. Nueva Sociedad- COPREPNUD.

[4] Cardona, N (2006). *Elementos para la formación del profesorado en la comunicación mediada por las TIC*. Infobit, pp. 8-9.

[5] Hohenwarter, Markus; Lavicza, Zsolt (2010). *GeoGebra, its community and future*. Asian Technology Conference in Mathematics.

[6] Area Moreira, Manuel (2004): *Los medios y las tecnologías en la educación.* Madrid, Pirámide.

[7] Baelo y Cantón (2009) *La sociedad y la modernización con el uso de las TICs* UNESCO pp.91-95

[8] Carmona de Castillo, M. (1991) *Innovación pedagógica: Didáctica centrada en procesos.* Caracas – Vol (3) pp.13

[9] Barrios A. (2001). *Construyendo y reconstruyendo la escuela. Una mirada desde la innovación: Proyecto escolar*. CENDES. Caracas, pp. 9-196

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Modelos de causas y consecuencias del aprendizaje de matemáticas. Enfoque sistémico

Isa Massa, Fernando Gustavo*
*Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Tucumán
Moreno 935. San Miguel de Tucumán, Tucumán – Argentina
ferim74@yahoo.com.ar

***Resumen*- En estos tiempos urge la necesidad de encontrar teorías y modelos matemáticos para saber las causas que tienen como consecuencia el buen o mal aprendizaje de las matemáticas. Demostré en teoría y práctica con ejemplos 5 modelos; de estos son 4 de investigación básica y 1 de investigación aplicada. Para desarrollar dos métodos de obtención de causas a partir de consecuencias. Uso una deducción de la serie de Taylor para luego seguir con programación lineal y finalizar con probabilidad de áreas (con teoremas geométricos de Euclides o uso del gradiente). Para el otro método uso estadísticas circular. El objetivo de los dos métodos es conocer que causas son deducibles de consecuencias cuantificables. El primer método es producto de la ecuación madre de teoría de sistemas y junto al segundo son de aplicación general. Uso enfoque sistémico para demostrar su relación con la teoría de la educación.**

***Palabras Clave*- Enfoque sistémico, causas y consecuencias, ecuación madre teoría sistemas, estadísticas circular.**

***Abstract*- In these times urge the need to find theories and Mathematical Models in order to know 'the cause' which result either in a good or bad learning of mathematics. I've demonstrated in theory and practice with examples about 5 models; these are 4 basic research and 1 applied research. To develop two methods of obtaining causes from consequences, i use a deduction of the Taylor series and then continue with linear programming, finally i end up with probability areas (geometric theorems of Euclid or using gradients). For the other method i use a circular statistics. The aim of the two methods is to known what causes are deductible from measurable consequences. The first method is a result from the main equation of systems theory, and considering the second method too, both are about general application. I use the System theory in order to demonstrate its relationship with educational theory approach.**

***Key Words*- System theory, causes-consequences, main equation of system theory, circular statistics.**

I. Introducción

Empezamos con cuatro modelos de diferentes disciplinas de las matemáticas para demostrar que cada aprendizaje de materias, sea cual fuere el cursado depende de las anteriores y del buen aprendizaje de las mismas. Lo mismo ocurre con el segundo modelo o demostración desde la estadística circular demuestro: todo aprendizaje depende de las bases del mismo. Para ello tomo en mi laboratorio educativo a cuatro materias de nivel universitario de la universidad tecnológica nacional-facultad regional Tucumán. Las demostraciones son claras al respecto en que dependen de ciclos anteriores el buen dictado de una materia, así como la empatía con el docente, métodos de estudio, predisposición del estudiante, y varios más. Sin embargo esta verdad no es tomada en cuenta por docentes y a veces el mal desempeño no es culpa del sistema educativo sino del poder de turno; en gobiernos y demás autoridades educativas. Por eso el sistema educativo en general tiene que ser acompañado por políticas claras y presupuesto acorde a los tiempos. Estamos en los albores de la era de la ciencia y tecnología y perder ese punto; y no acompañar con presupuesto y medidas para la obtención de la calidad educativa es un error y grave por decir imperdonable en estos tiempos.

II. Material y métodos

Para la primera demostración uso modelos probabilísticos y deterministas. Los modelos deterministas son: la ecuación madre de teoría de sistemas (basado en serie de Maclaurin), y programación lineal en una matriz de mínimo. Los modelos de probabilidad son: objetivos desde probabilidad derivada de teoremas de Euclides y objetivos derivados de probabilidad del gradiente. Estos modelos demuestran que las materias: cálculo 1 y cálculo 2, tienen influencia en el mal aprendizaje de la materia: matemática superior. La segunda parte uso otro modelo original que es una deducción de la estadística circular y que me da como resultado la respuesta a la conjetura de que cálculo 1 y cálculo 2 son los responsables del mal desempeño de probabilidad y estadísticas. Con información de la base de datos de la citada universidad, para las distintas demostraciones uso modelos originales y nuevos que en su destacado congreso los presento al mundo. El software usado es solver de Excel y Wxmaxima. Además de Word.

III. Causas y consecuencias: modelos matemáticos. Enfoque sistémico

Como vimos para la definición de teoría de sistemas en [1]; sistemas es: "un conjunto de partes que se relacionan en busca de un objetivo"; con esa definición determinamos tres partes importantes en sistemas: partes, relaciones y objetivo. En la definición de causas de la real academia de lengua española, versión web, ver [2], encontramos la definición de causa como:" Aquello que se considera como fundamento u origen de algo"; entonces surge como hipótesis de entrada que la causa es para la teoría de sistemas las partes y relaciones. Ya que estas son el origen o fundamento de la consecuencia. Tal como dice la definición de la real academia. Veamos la definición de consecuencias de [2], "hecho o acontecimiento que se sigue o resulta de otro"; entonces la consecuencia es el objetivo de la teoría de sistemas. Esto hipótesis tiene que ser demostrada desde las

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

matemáticas que propongo para una nueva concepción de las causas y consecuencias desde la teoría de sistemas. Tenemos que considerar que los modelos de causas y consecuencias que propongo son de uso general pero los demuestro desde las teorías de la educación primero. Es una obligación de los gobiernos el presupuesto acorde a los tiempos en materia educativa y el error de dictado como las consecuencias no deseadas de mal desempeño académico serán mínimas.

IV. Causas y consecuencias. Estadística circular

Tomemos como hipótesis que existe una causa que puede generar el crecimiento de las demás y la más probable de crecer. Para causas y consecuencias que puedan ser cuantificables, de una base de datos de la Universidad tecnológica nacional – facultad regional de Tucumán; obtengo resultados contundentes sobre la hipótesis de que cálculo 1 y cálculo 2 tienen una amplia responsabilidad en el mal desempeño de la materia probabilidad y estadísticas. Empecemos con la demostración de la nueva función de distribución de probabilidades en estadísticas circular. Deducible de tres maneras distintas de demostración, sus aplicaciones son múltiples pero desde la educación obtengo una amplia variedad de funciones.

$$x = (\cos \propto, \sin \propto)$$

Para $x_1,\ldots,x_n$ y ángulos en $\propto_i$; i=1,…,n. La dirección media $\bar{\propto}$ de $\propto_1,\ldots,\propto_n$ es la dirección de $x_1 +\ldots+ x_n$ que es el centro de masa $\bar{x}$ de $x_1,\ldots,x_n$.

Si las coordenadas cartesianas de x_i son $(\cos \propto_i, \sin \propto_i)$; entonces $(\bar{C},\bar{S})$ son las coordenadas cartesianas del centro de masas.

$$\bar{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos \propto_i \quad ; \quad \bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} sin \propto_i$$

Si $x_1,\ldots,x_n$ es un vector no nulo; entonces la longitud media es

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2} \quad (1)$$

Es mayor a cero; y además

$$\bar{C} = \bar{R}\cos \bar{\propto} \quad , \quad \bar{S} = \bar{R}\sin \bar{\propto}$$

Si $\propto_1,\ldots,\propto_n$ están agrupadas entonces $\bar{R}$=1
Si $\propto_1,\ldots,\propto_n$ están dispersas entonces $\bar{R}$=0
Desviación circular estándar

$$v = \sqrt{-2\ln \bar{R}} \quad (2)$$

Veamos el siguiente teorema
Teorema 1: *Si $\propto_1,\ldots,\propto_n$ son causas que se pueden cuantificar y $\propto_i$ es la causa que impulsa a las demás; entonces* $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} sin^2 \propto \, d\alpha = 1$ *es la f.d.p. que mejor ajusta a la causa y consecuencia; y probabilidad de causa P_c es la f.d.p.*
Demostración 1:
Dado el importante estadístico R en estadísticas circular, y la media y desvío conocidos; empezamos con la deducción de la f.d.p.

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$$

Empezamos con la idea de que existe una sola causa que impulsa a las otras y es la más probable de crecer; entonces de esto quedaría:

$$\bar{S}^2 = \sin^2 \propto$$
$$\bar{C}^2 = \cos^2 \propto$$

Para un estadístico R, sabemos que cuando los datos están agrupados R tiende a 1. Para nuestro caso en particular al existir una sola causa suponemos, como es de saber, que los datos estarán agrupados. Entonces:

$$1 = \sqrt{\sin^2 \propto + \cos^2 \propto}$$

Que es una identidad trigonométrica conocida. Para ello trabajamos a conveniencia la identidad y quedamos así:

$$1 - \cos^2 \propto = \sin^2 \propto$$

Con la frecuencia relativa de Laplace encontramos como caso totales a π.
Quedando:

$$\frac{(1 - cos^2 \propto)}{\pi} = \frac{\sin^2 \propto}{\pi}$$

Las causas son la anti derivación de las consecuencias; por lo tanto y dentro de límites de integración del círculo tomamos lo siguiente:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 \propto \, d\alpha = \quad (3)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} \propto - ¼ \sin 2 \propto\right)\Big\{_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(2\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 4\pi - 0\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}(\pi - 0)$$
$$= 1$$

Que es la función de distribución de probabilidad para causas que son determinantes y crecen con más probabilidad.
Demostración 2:
Del teorema del seno deducimos

$$\frac{A}{\sin \beta} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{C}{\sin \theta}$$

Donde A, B y C son los lados opuestos a los ángulos β, α y θ respectivamente.

$$B = \frac{\sqrt{\pi}\sin \alpha}{\sqrt{\pi}}$$

Elevo al cuadrado ambos miembros

$$\frac{\sin^2 \propto}{\pi}$$

Y a partir de éste momento empieza una demostración parecida a la demostración 1.
Demostración 3:
Por identidad trigonométrica

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

Por frecuencia relativa de Laplace

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

$$\frac{(1-cos^2\propto)}{\pi} = \frac{\sin^2\propto}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 \propto \; d\alpha = 1$$

Demostración practica

Para una base de datos de la universidad tecnológica nacional-facultad regional Tucumán, los datos de los últimos 7 años de desaprobados y ausentes en porcentaje y por año para la materia probabilidad y estadísticas (consecuencia); sobre las materias calculo 1 y calculo 2 (causas). Para saber si estas últimas son las responsables del mal desempeño en probabilidad y estadísticas. Probabilidad y estadísticas (Considero a los ausentes como desaprobados ya que no llegaron a rendir la materia)

Tabla I (Probabilidad y estadísticas)

Año	Desaprobados y ausentes
2010	50.89
2011	46.87
2012	56.26
2013	51.26
2014	32.79
2015	29.51
2016	18.18

Tabla II (Cálculo 1)

Año	Desaprobados y ausentes
2010	69.97
2011	68.29
2012	66.43
2013	72
2014	60.21
2015	71.13
2016	71.12

Valores extremos de Probabilidad y estadísticas en los últimos 7 años: 18.18 y 56.26

Valor de f.d.p. para esos valores extremos

100 % ↔ 6.28 $(6.28 = 2\pi)$

18.18% ↔ $x = \frac{(18.18\%)\,(6.28)}{100\%} = 1.14 = 65.35^o$

100% ↔ 6.28

56.26% ↔ $x = \frac{(56.26\%)\,(6.28)}{100\%} = 3.53 = 202.36^o$

Función de distribución de probabilidades, P_c: Probabilidad de causa

$$P_c = \frac{1}{\pi}\int_{1.14}^{3.53} \sin^2 \propto \; d\alpha = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}(3.53) - \text{¼ sin 2 } (202.36^o) - \frac{1}{2}(1.14) + \text{¼ sin 2 } (65.35^o)\right) = 0.38$$

Dada esa probabilidad sobre una única causa, veamos como cuantificar los valores de causas para demostrar una relación uno a uno entre la consecuencia de mal desempeño de probabilidad y estadísticas; con una de las causas. El deficiente dictado de cálculo 1 o cálculo 2.

Para 2010 en cálculo 1:

100% ↔ 360º

69.97% ↔ $x^o = 251.89^o$; y así para los demás datos

$$\bar{C} = \frac{(\cos 251.8 + \cos 245.8 + \cos 239.1 + \cos 259.2 + \cos 216.7 + \cos 256{,}1 + \cos 256)}{7}$$

= -0.38

$$\bar{S} = \frac{(\sin 251.8 + \sin 245.8 + \sin 239.1 + \sin 259.2 + \sin 216.7 + \sin 256{,}1 + \sin 256)}{7}$$

= -0.89

$$\bar{R} = 0.97$$

Los datos están sumamente agrupados por lo tanto esperamos un desvío pequeño.

V= 0.25

Tabla III (Cálculo 2)

Año	Desaprobados y ausentes
2010	79.66
2011	80.54
2012	75.6
2013	39.29
2014	31.65
2015	61.94
2016	93.75

$$\bar{C} = \frac{(\cos 286.7 + \cos 289.9 + \cos 272.1 + \cos 141.4 + \cos 113.9 + \cos 222.9 + \cos 337.5)}{7}$$

= -0.046

$$\bar{S} = \frac{(\sin 286.7 + \sin 289.9 + \sin 272.1 + \sin 141.4 + \sin 113.9 + \sin 222.9 + \sin 337.5)}{7}$$

= -0.34

$\bar{R}$ = 0.34

Esperamos un desvío mayor

V=1.47

$\bar{R} \approx P_c$

$0.34 \approx 0.38$

Por lo tanto concluimos que el mal dictado de cálculo 2 es más probable como causa de mal desempeño de probabilidad y estadísticas. Por ley de transitividad si cálculo 2 causa de mal desempeño de probabilidad y estadísticas y cálculo 1 causa de mal desempeño de cálculo 2 (resultado obvio); entonces cálculo 1 causa de mal desempeño de probabilidad y estadísticas.

V. Causas y consecuencias. Ecuación madre de teoría de sistemas

Partimos de la hipótesis de que las partes y relaciones de la teoría de sistemas son las causas y el objetivo las consecuencias. Entonces en un primer planteo de la ecuación madre de sistemas empiezo con una deducción de la serie de Maclaurin un caso especial de la serie de Taylor. Sabemos las relaciones son de vital importancia en los sistemas en general y en educación en particular.

Teorema 2: *Si $C_1X_1+\ldots+C_nX_n$ es parte de un planteo de sistemas de ecuaciones y C_i es la relación y X_i es la parte; entonces $f(x) = e^{cx}$ es la ecuación madre de teoría de sistemas con C y X como causas.*

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Demostración:
Tomamos a C_i como parámetro para nuestro estudio. Como las relaciones entre seres humanos y entre partes en general de todo sistema son una derivación de otras relaciones o consecuencia de estas, podemos obtener una función primitiva de la anti derivadas de cada relación.

$\int C_i \, dx = C_i X + K$; donde K es constante que la consideramos igual a 0.

$\int C_i \, X \, dx = C_i \frac{X^2}{2}$

$\int C_i \, \frac{X^2}{2} dx = C_i \frac{X^3}{2\,3}$

$\int C_i \, \frac{X^3}{2\,3} dx = C_i \frac{X^4}{2\,3\,4}$

…

$\int C_i \, \frac{X^{n-1}}{2\,3\ldots(n-1)} dx = C_i \frac{X^n}{2\,3\,4\ldots n}$

Sumamos los resultados.

$= C_i + C_i X + C_i \frac{X^2}{2} + C_i \frac{X^3}{2\,3} + C_i \frac{X^4}{2\,3\,4} + \ldots + C_i \frac{X^n}{2\,3\,4\ldots n} = C_i + C_i X + C_i \frac{X^2}{2!} + C_i \frac{X^2}{3!} + \ldots + C_i \frac{X^2}{n!} + \ldots$

Esto es una aproximación a serie de Maclaurin con

$$f(x) = e^{cx} \quad (4)$$

$f^j(0) = C_i \, e^{Ci0} = C_i$

$f^{(j)}(x) = C_i \, e^{CiX}$, para toda derivada con j=1,...,n

Por lo tanto $f(x) = e^{cx}$; es la ecuación madre de la teoría de sistemas. Con C_i como relación o causa y X como parte o causa.

Ya a sabiendas de cómo encontrar nuevas relaciones o causas, empezamos a buscar el método para saber las partes o causas. La forma adecuada es con la programación lineal en un problema de mínimo.
Planteo de problema de programación lineal: Las variables de decisión siempre serán dos debido a que el objetivo o consecuencia; calculado de dos formas distintas necesita el planteo de áreas y se dificulta para más de dos ejes.

Variable 1, alumno: X_1
Variable 2, docente: X_2

Para dos de los ejes por los cuales se basa el buen o mal desempeño del sistema educativo, el docente y alumno. El problema es de mínimo ya que debemos minimizar el mal desempeño de la materia: matemática superior de la universidad tecnológica nacional-facultad regional Tucumán. Se toman inecuaciones relativas a horas de estudio y horas para nivel de complejidad de las materias: cálculo 1 y cálculo 2. Las materias cálculo 1 y cálculo 2 son las que se señalan como responsables en el déficit de matemática superior.
Para cálculo 1:

Coeficientes económicos: E_1 y E_2 (en porcentaje)
E_1: Tasa de desaprobados en los últimos 7 años.
E_2: Tasa de mala calificación de alumnos a los docentes en los últimos 7 años.
Coeficientes Tecnológicos: T_1, T_2, T_3 y T_4 (horas/semana)
T_1: Cantidad de horas promedio para el estudio. Entre la facultad y fuera de ella (alumno).
T_2: Cuantas horas promedio de enseñanza (docente).
T_3: Horas promedio que se dedicaba a aprender un tema en particular (alumno).
T_4: Horas promedio que le costaba enseñar un tema en particular a la mayoría de la clase (docente).
Recursos: R_1 y R_2
R_1: Horas que la catedra como mínimo pide para el dictado de la materia.
R_2: Horas promedio en datos de opinión estadísticas que la cada tema son aprendidos de la materia.

Entonces quedamos con el siguiente planteo:

$$\begin{aligned} E_1X_1 + E_2X_2 &\rightarrow MIN \quad (5) \\ T_1X_1 + T_2X_2 &\geq R_1 \\ T_3X_1 + T_4X_2 &\geq R_2 \\ X_1 &\leq 1 \\ X_2 &\leq 1 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para cálculo 2 se hace el mismo planteo pero con diferentes datos. El planteo de programación lineal es muy flexible pudiendo haber cambios de problema en problema.
Las relaciones son los coeficientes tecnológicos y las partes las variables de decisión.

VII. Objetivo o consecuencia

Los objetivos o consecuencia son el resultado de dos métodos originales para saber la probabilidad de cumplir con el objetivo del sistema educativo. Para nuestro caso tenemos que demostrar una probabilidad alta de cumplir con los objetivos. Para la obtención de la probabilidad de obtener objetivos desarrollé dos variantes: usando teoremas geométricos de Euclides y la del gradiente.

VIII. Uso de teoremas de Euclides

El sistema de ecuaciones en programación lineal arroja unas áreas encerradas entre las rectas y cuya suma es variable. La suma de las distintas áreas que se generan del sistema de ecuaciones es el área total.

Teorema 3: *Si la suma de áreas generadas por intersección de rectas de un sistema de ecuaciones es A; entonces la probabilidad de un objetivo es la deducción de áreas de triángulos rectángulos sobre los teoremas de Euclides; reduciendo triángulos y de esta forma:*

$$P_o = 1 - \{(A_1 - \frac{(\frac{(a11)^2}{c11}\sqrt{p11q11})}{2} - \frac{(\frac{(a12)^2}{c12}\sqrt{p12q12})}{2} - \ldots) + (A_2 - \frac{(\frac{(a21)^2}{c21}\sqrt{p21q21})}{2} - \frac{(\frac{(a22)^2}{c22}\sqrt{p22q22})}{2} - \ldots) + \ldots + (A_n - \frac{(\frac{(an1)^2}{cn1}\sqrt{pn1qn1})}{2} - \frac{(\frac{(an2)^2}{cn2}\sqrt{pn2qn2})}{2} - \ldots)\}$$

Demostración:
Si A es el área total, generemos distintas áreas a partir de triángulos rectángulos con una altura promedio y base

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

deducible de las intersecciones de las rectas y cuya suma de áreas sea A.

A_i: área de un triángulo rectángulo sobre una base determinada por la intersección de rectas del sistema de ecuaciones y cuya altura es idéntica para todos los triángulos rectángulos

$A_i = \frac{(bi\ H)}{2}$; área de un triángulo rectángulo
$A_1 + \ldots + A_n = A$
$A = \frac{(b1\ H)}{2} + \ldots + \frac{(bn\ H)}{2}$
$2A = H(b_1 + \ldots + b_n)$

$$\frac{2A}{(b1+\ldots+bn)} = H \quad (6)$$

Para una altura idéntica a los distintos triángulos rectángulos que se forman y cuya base es deducible de las intersecciones del sistema de ecuaciones

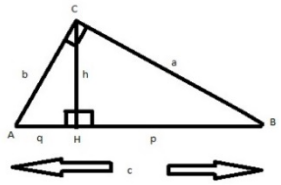


Fig. 1

Teoremas de Euclides referidas al cateto: triángulo rectángulo

$$a^2 = pc$$
$$b^2 = qc$$

Teoremas de Euclides referidas a la altura: triángulo rectángulo

$$h^2 = pq$$

A cada triángulo rectángulo le resto el mayor de los dos triángulos formados, quedando:

Fig. 2

Las sucesivas diferencias de áreas con los triángulos mayores me darán un área entre 0 y 1 que es la probabilidad del objetivo del sistema.

$A_i = \frac{(bi\ H)}{2}$

$A_1 + \ldots + A_n = A$; la suma de áreas de los triángulos rectángulos formados

$$p = \frac{a^2}{c}$$
$$h = \sqrt{pq}$$

Algoritmo 1: en seudocódigo para cálculo de probabilidad de objetivos

```
Mientras (seguir) hacer
Si A es menor o igual a 1
Entonces Si A es menor a 0
              Entonces A igual a 0
              Salir
Sino Calcular A
```

La convergencia a una probabilidad depende de la base a y de la altura H. Si en el sistema de ecuaciones de programación lineal existe empatía entre docentes y alumnos y las relaciones o coeficientes tecnológicos son parecidos, entonces la convergencia es rápida. Se demuestra de manera sencilla.
El objetivo final depende de esta empatía, entonces la probabilidad de objetivos será el complemento de ello.

$$P_o = 1 - \{(A_1 - \frac{(\frac{(a11)^2}{c11}\sqrt{p11q11})}{2} - \frac{(\frac{(a12)^2}{c12}\sqrt{p12q12})}{2} - \ldots) + (A_2 - \frac{(\frac{(a21)^2}{c21}\sqrt{p21q21})}{2} - \frac{(\frac{(a22)^2}{c22}\sqrt{p22q22})}{2} - \ldots) + \ldots + (A_n - \frac{(\frac{(an1)^2}{cn1}\sqrt{pn1qn1})}{2} - \frac{(\frac{(an2)^2}{cn2}\sqrt{pn2qn2})}{2} - \ldots)\} \quad (7)$$

Esta metodología requiere de una corrección en la dirección que lo logramos con el uso de la ecuación madre de teoría de sistemas. En las relaciones como vimos en la demostración teórica de la misma. Esta corrección se da con valores pequeños.

IX. Uso del gradiente

En este caso las áreas varían según los valores de coeficientes tecnológicos o causas del sistema educativo. Estos valores varían según el cálculo de nuevos valores a través de la ecuación madre de teoría de sistemas.
Se van calculando nuevas áreas formada por la intersección de rectas del sistema de ecuaciones de programación lineal; a través de modificar los valores dentro del sistema de ecuaciones de los coeficientes tecnológicos (valores tomados de la ecuación madre de teoría de sistemas)
$A = A_1 + \ldots + A_n$
$A_1, \ldots, A_n$ son valores de áreas generados por el sistema de ecuaciones de programación lineal. Modelo de programación lineal:

$$E_1X_1 + E_2X_2 \rightarrow \text{MIN} \quad (8)$$
$$T_1X_1 + T_2X_2 \geq R_1$$
$$T_3X_1 + T_4X_2 \geq R_2$$
$$X_1 \leq 1$$
$$X_2 \leq 1$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$
$$T_i = e^{C(i)X(i-1)} \quad (9)$$

C_i: coeficiente tecnológico para relación o causa; toma el valor del sistema de ecuación actual. Entonces:
$C_i = T_i$
$X_{(i-1)}$= Valor de la parte o causa para el modelo anterior de programación lineal.
Entonces quedamos de la siguiente manera:
$T_{(i+1)} = e^{T(i)X(i-1)}$
Los recursos siguen por la misma metodología

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

$R_{(i+1)}= e^{R(i)X(i-1)}$
El recurso nuevo para la matriz de programación lineal es el resultado del recurso anterior para la matriz anterior del sistema de ecuaciones en el modelo de ecuación madre de teoría de sistemas.
Esta es la nueva matriz de sistema de ecuaciones de programación lineal para un problema de mínimo:

$$E_1X_{1(i+1)} + E_2X_{2(i+1)} \rightarrow \text{MIN} \quad (10)$$
$$T_{1(i+1)}X_{1(i+1)} + T_{2(i+1)}X_{2(i+1)} \geq R_{1(i+1)}$$
$$T_{3(i+1)}X_{1(i+1)} + T_{4(i+1)}X_{2(i+1)} \geq R_{2(i+1)}$$
$$X_{1(i+1)} \leq 1$$
$$X_{2(i+1)} \leq 1$$
$$X_{1(i+1)}, X_{2(i+1)} \geq 0$$

Donde las relaciones o causas y los recursos son el resultado de la anterior matriz.
Vamos calculando las áreas generadas para la intersección de rectas del sistema de ecuaciones hasta que esa área este entre 0 y 1. Cuando existe empatía entre docente y alumno esa área converge más rápido y la probabilidad de objetivos por esa razón es el complemento de ello:

$A = (A_1+\ldots+A_n)$
$P_o=1- A$
Algoritmo 2: Seudocódigo de cálculo de áreas:

```
Mientras (seguir) hacer
Si A es menor o igual a 1
Entonces Si  es menor a 0
              Entonces A igual a 0
              Salir
Sino Calcular A (con una nueva matriz de programación lineal en coeficientes tecnológicos y recursos)
```

Corolario: *Si X_1, X_2 son las variables de decisión de una matriz de programación lineal y T_1, T_2, T_3, T_4 son sus coeficientes tecnológicos entonces el algoritmo de probabilidad de objetivo converge más rápidamente cuando* $T_1 \approx e^{T2X2}$

Lo cual se demuestra fácilmente por la empatía docente-alumno.

Demostración Práctica
Empecemos con cálculo 1. Los coeficientes toman los siguientes valores según una encuesta realizada a dos comisiones de matemática superior sobre su opinión en cálculo 1 y cálculo 2.

E_1: 0.63
E_2: 0.7
Coeficientes Tecnológicos: T_1, T_2, T_3 y T_4 (horas/mes)
T_1: 25.5
T_2: 24
T_3: 40.2
T_4: 40
Recursos: R_1 y R_2
R_1: 40
R_2: 40
$0.63\ X_1 + 0.7\ X_2 \rightarrow$ MIN
$25.5\ X_1 + 24\ X_2 \geq 40$
$40.2\ X_1 + 40\ X_2 \geq 40$
$X_1 \leq 1$
$X_2 \leq 1$
$X_1, X_2 \geq 0$
Los valores obtenidos son los siguientes:
$X_1 = 1$
$X_2 = 0.6$

La inecuación menor o igual a uno se recomienda cuando queremos saber el grado de participación de docente y alumno en el objetivo final.
Lo que sugiere mayor participación del alumno que el docente en la minimización de problemas en dictado de cálculo 1.
No siempre podemos realizar la corrección de la Ec. 4 debido a que los valores pueden ser altos. Para esos casos dejamos la matriz de programación lineal como su origen.
Calculo de áreas
Sabemos que para tal fin hay que usar integrales definidas.
Otro punto a tener en cuenta es que método de obtención de objetivos usaremos. El del gradiente se recomienda para sistemas pequeños, con pocas rectas ya que hay un costo computacional en los constantes cálculos de integrales definidas y deducción de la región de integración.
Por ello es recomendable el del gradiente.
Las rectas de la matriz tienen la siguiente gráfica:

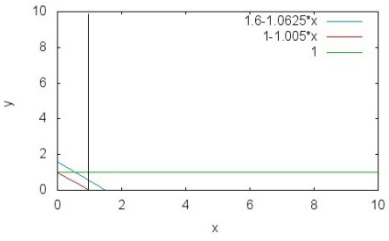


Fig. 3
Integral definida para cálculo de área.

$X_2 = 1.6 - 1.0625\ X_1$
$X_2 = 1 - 1.005\ X_1$
$A = \int_0^{0.56}(1-(1-1.005X1))\ dx_1 + \int_{0.56}^{1}((1.6-1.0625X1)-(1-1.005X1))\ dx_1$

$A = \int_0^{0.56} 1.005X1\ dx_1 + \int_{0.56}^{1}(0.6-0.0575\ X1)\ dx_1$

$A = 0.4$

Como el área es menor a 1 no es necesario ninguno de los dos algoritmos de objetivos. Sin embargo entendemos que la probabilidad de objetivo es el complemento del área.
Entonces

$P_o = 1 - 0.4 = 0.6$

Que es una probabilidad relativamente más alta al promedio por lo tanto el objetivo se cumple. Recordemos que el

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

propósito es demostrar que la materia cálculo 1 es la responsable del mal dictado de matemática superior. Esto se demuestra.

Cálculo 2
Al igual que cálculo 1 se hizo una encuesta a alumnos de matemática superior. Los resultados los expresamos en la siguiente matriz de mínimo de programación lineal.
E_1: 0.79
E_2: 0.8
Coeficientes Tecnológicos: T_1, T_2, T_3 y T_4 (horas/mes)
T_1: 34.9
T_2: 24
T_3: 58.2
T_4: 40
Recursos: R_1 y R_2
R_1: 40
R_2: 40
$0.79\ X_1 + 0.8\ X_2 \rightarrow$ MIN
$34.9\ X_1 + 24\ X_2 \geq 40$
$58.2\ X_1 + 40\ X_2 \geq 40$
$X_1 \leq 1$
$X_2 \leq 1$
$X_1, X_2 \geq 0$
Los valores obtenidos son los siguientes:
$X_1 = 1$
$X_2 = 0.21$

Hay mayor participación del alumno que el docente y además la misma es muy por encima ya que los coeficientes tecnológicos o causas del alumno se distancian mucho de los coeficientes tecnológicos o causas del docente. Por lo tanto las causas del alumno son más fuertes que las causas del docente.

Calculo de áreas
Veamos la siguiente figura de la matriz reciente expuesta.
La fig.4 demuestra que el área difícilmente será mayor a uno ya que tenemos las inecuaciones de menor o igual a uno donde obligamos al óptimo entre un área menor o igual a uno. De esta manera, la matriz de programación lineal será siempre flexible pudiendo tener formas dependiendo del problema a analizar.
Cabe señalar que la elección de la matriz como un sistema de mínimos para minimizar el mal dictado es arbitraria y puede tomar cualquier forma dependiendo del analista.
También es importante saber que en todo sistema educativo es de suma utilidad modelar los sistemas de horas entre aprendizaje y cantidad de horas de estudio total de la materia. Los docentes como parte del sistema son evaluados y el correcto dictado de la materia depende de todos los actores del sistema educativo.

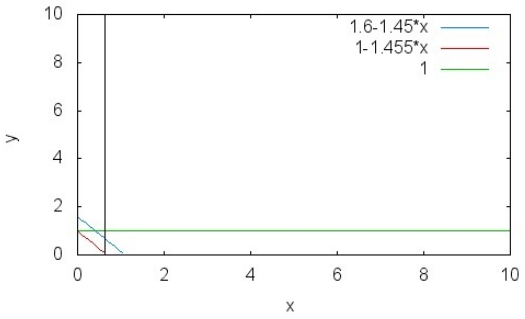


Fig. 4

Integral definida para cálculo de áreas
$X_2 = 1.6 - 1.45\ X_1$
$X_2 = 1 - 1.455\ X_1$
$A = \int_0^{0.41}(1 - (1 - 1.455X1))\ dx_1 + \int_{0.41}^{1}((1.6 - 1.45X1) - (1 - 1.455X1))\ dx_1$

$A = \int_0^{0.41} 1.455X1\ dx_1 + \int_{0.41}^{1}(0.6 - 0.005\ X1)\ dx_1$

$A = 0.47$

Como el área es menor a 1 no es necesario ninguno de los dos algoritmos de objetivos. La probabilidad de objetivo es el complemento del área.
Entonces

$P_o = 1 - 0.47 = 0.53$

Que es una probabilidad relativamente más alta al promedio por lo tanto el objetivo se cumple. Recordemos que el propósito es demostrar que la materia cálculo 2 es la responsable del mal dictado de matemática superior. Esto se demuestra.
La razón de que las dos materias en estudio: cálculo 1 y cálculo 2 hayan sido las responsables del mal dictado de matemática superior la encontramos en las matrices de mínimo. Como dedujimos existe empatía entre docente y alumno en la información de coeficientes tecnológicos o causas que como vimos en un primer planteo son las relaciones. Si estas relaciones son parecidas concluimos que obtendremos áreas pequeñas en la intercepción de rectas y como la probabilidad de objetivos o consecuencia es su complemento, entonces la misma será de esperar alta.

X. Conclusiones

Los modelos matemáticos presentados al congreso son nuevos y originales, siendo la educación uno de sus aplicaciones. La educación necesita de la conciencia colectiva de los pueblos en que es el pilar de la sociedades modernas, y más aún en la era de la ciencia y tecnología; es una variable que cuantifica cuan civilizados somos. Pero ese nivel de civilización tiene que ser para todos y todas; sin distinciones y además los gobiernos tienen como parte del sistema que trabajar y acompañar con presupuestos acordes a los tiempos.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La educación no es un número que engalana la actividad de los pueblos, es más que una necesidad, es un derecho. En estos tiempos no podemos hablar de ignorancia al que no sabe, sino al que no quiere aprender. En los modelos presentados demostré que la educación se da en serie. Entonces el conocimiento actual depende de la tarea de docentes de años anteriores. Sino la tarea será por demás de difícil. Los alumnos, docentes, personal de educación, autoridades educativas y gobierno principalmente, son partes de un sistema. Donde el mal funcionamiento de una de las partes o causas es el motivo del mal funcionamiento o consecuencias del sistema. Los modelos de causas y consecuencias del aprendizaje de matemáticas tienen tal fin. De lograr el funcionamiento correcto del sistema educativo sabiendo las causas del mismo, siempre y cuando podamos cuantificar las consecuencias.

AGRADECIMIENTOS

Tengo mucho que agradecer, especialmente y en primer lugar a la escuela Normal superior de México por la oportunidad de presentar mi trabajo de investigación e invitarme, a mi amigo Marcos de DIEE ENSM por su paciencia y sabios consejos y apoyo, al Dr Herrera, de mi país a: Ing. Ricardo Adra, Lic. Elena Gianinetto, Dr. Adrián Will, Ing. José Nasrallha, Ing. Joaquín Igon. Ing. Luis D'Alessandro, A.U.S. Damian García Pascualini, Cdr. Arturo López, Padre Miguel Galland, Prof. Diego Di Pietro, Prof. Carlos Córdoba, Dra. Gladys Mattalia, Dr. Pino, a mi familia, a mis amigos y a todos los que fueron parte de esta investigación; a todos gracias!

REFERENCIAS

[1]Sommerville Iam. Ingeniería del Software. Pearson educación. (2005)

[2] http://dle.rae.es/ Accedido 12 de Septiembre de 2016.

[3]Walpole R, Myers R, Myers S, Ye K. Probabilidad y estadísticas para ingeniería y ciencias. Pearson educación. (2007)

[4]Leithold . El cálculo con geometría analítica. Harla. (1990)

[5]Mathur. Investigación de operaciones y el arte de la toma de decisiones. Prentice Hall. (1996)

[6]Taha. Investigación de operaciones. Alfaomega. (1991)

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Identificación y atención a niños con aptitudes sobresalientes en el Estado de Hidalgo

Tuyub- Moreno, J.C. [1]; Espíndola-Lugo, M.A. [1]; Roque-Pacheco, J.A. [1]; González-García, M.G. [1]; y Cruz-Ramírez, M.G[1].
[1]Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico Superior de Huichapan, Huichapan, Hidalgo, México
jctuyub@iteshu.edu.mx; maespindola@iteshu.edu.mx; jaroque@iteshu.edu.mx; mggonzalez@iteshu.edu.mx; mgcruz@iteshu.edu.mx

***Resumen*- En la actualidad es necesario desarrollar programas que atiendan a niños y jóvenes con aptitudes sobresalientes como parte de los retos de calidad, equidad y cobertura de la Reforma Educativa del país. El presente proyecto es desarrollado en el Instituto Tecnológico Superior de Huichapan como parte del programa de fomento a las vocaciones científicas y tecnológicas del CONACYT. En el trabajo se exponen la perspectiva teórica-social de las aptitudes sobresalientes como una condición desarrollable y medible, a diferencia del talento y la inteligencia, describiendo las etapas del proyecto desde la selección hasta la implementación. La propuesta consistió en evaluar, identificar y recolectar datos mediante talleres enfocados a la ciencia y matemáticas con el objetivo de sistematizar un programa de identificación y atención a niños con aptitudes sobresalientes y proponer las bases metodológicas para desarrollar y potenciar las aptitudes dentro del aula.**

***Palabras Clave*- Aptitudes Sobresalientes, Ciencia y matemáticas, Educación Básica, Estudiantes sobresalientes.**

Abstract- Recently, it has become necessary to developed programs which take care of kids and youngsters with outstanding abylity, as part of the quality, equality and coverage challenges proposed by the Educational Reform. This article forms part of a project developed on the Instituto Tecnológico Superior de Huichapan, of the CONACYT "Promotion to Scientific and Technological Vocations Program" The Outstanding Abylity social theory perspective is described as a positive and measurable condition, in opposition to talent and intelligence. Project chapters are described, from selection to implementation. A proposition to evaluate, identify and collect data using workshops focused, on science and matematics, the identification and attention of children with outstanding abylity is presented, as well as the methodological foundations from which to develop and improve these abylity in the classroom.

Keywords- Elementary school, Outstanding abylity, Outstanding students, Science and math.

I. Introducción

En las últimas décadas se ha despertado el interés por atender a los estudiantes con aptitudes sobresalientes. En diferentes partes del mundo se han desarrollado teorías e investigaciones para proponer métodos que permitan identificar ésta población de tal forma que se puedan diseñar e implementar programas que les ayuden potenciar sus capacidades.

México no es la excepción, desde 1983 los estudiantes con aptitudes sobresalientes han estado bajo la mirada de las políticas educativas. La atención a esta población ha estado sometida, como muchas otras decisiones importantes, a las disposiciones políticas y los cambios de gobierno, entre otras. De tal forma que las capacidades y aptitudes sobresalientes de estudiantes de diferentes niveles educativos es considerada como uno de los grandes potenciales de México.

En particular la SEP ha mostrado el interés por atender a esta población como parte de cumplir con los objetivos de equidad y calidad de la educación, de manera que define como estudiantes con aptitudes sobresalientes a *aquéllos/as capaces de destacar significativamente del grupo social y educativo al que pertenecen, en uno o más de los siguientes campos del quehacer humano: científico-tecnológico, humanístico-social, artístico o de acción motriz* [1].

Dichos estudiantes, por presentar necesidades específicas, requieren de un contexto facilitador que les permita desarrollar sus capacidades personales y satisfacer sus inquietudes e intereses para su propio beneficio y el de la sociedad; representando un reto a nivel política educativa en la atención a la diversidad escolar, así como una gran oportunidad para transformar y enriquecer el contexto educativo.

Tomando en cuenta esta demanda de la sociedad a las instituciones de educación, el Instituto Tecnológico Superior de Huichapan (ITESHU) como parte de Programa de Fomento a las Vocaciones Científicas y Tecnológicas en Niños y Jóvenes Mexicanos, del Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) propone el desarrollo del *Curso-Taller de matemáticas y ciencia dirigido a niños con aptitudes sobresalientes del Valle del Mezquital en la región de Huichapan, estado de Hidalgo*, teniendo como objetivo aportar las bases metodológicas para el desarrollo estratégico de un programa de mayor envergadura, que permita la identificación y atención necesaria a los niños con aptitudes sobresalientes de la zona suroeste del estado de Hidalgo, en donde actualmente no se tiene un programa educativo en marcha con esta intención, de ahí la necesidad de su implementación.

II. Objetivos de investigación

De acuerdo con el objetivo del Programa propuesto por el CONACYT y a los objetivos del curso-taller, se pretenden responder a tres cuestiones emergentes. La primera engloba la aptitud de los estudiantes con respecto al saber; el segundo sobre la propuesta de ejecución planteada en el programa y la

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

tercera sobre las condiciones necesarias que permitan su aplicabilidad en diferentes contextos, niveles educativos y regiones del país:

a) ¿cuáles son las características y cualidades de estudiantes que son capaces de distinguirse significativamente en su desarrollo académico? De manera concreta se refiere a cuestiones como:
    a. ¿Qué construyen a partir de lo que saben?
    b. ¿Qué propuestas son las surgen a partir de la aplicación de eso que saben?
    c. ¿Cómo socializan eso que saben?
b) ¿Qué cualidades deberían tener los programas y proyectos para atender las necesidades de estos estudiantes?
c) ¿Es posible extrapolar estos resultados a un proceso que permita desarrollar el talento en todos los estudiantes del nivel básico y medio básico a fin de cumplir con los criterios de equidad, calidad y cobertura de la educación?

Las respuesta a las interrogantes tienen por objeto brindar las bases para un programa de identificación y atención de estudiantes sobresalientes de educación básica y media básica a fin de impulsarlos en el ámbito científico y tecnológico mediante la desarrollo de sus capacidades.

III. Fundamentos teóricos

A. Aptitudes sobresalientes

Son extensos los enfoques y resultados de las investigaciones teóricas y aplicadas realizadas en torno a la temática de aptitudes sobresalientes, talento e inteligencia, de tal forma que poco a poco se van delimitando y definiendo. La más notable diferencia está entre el talento y la inteligencia, y el talento y las aptitudes sobresalientes. La inteligencia se estudia y mide a partir del logros y capacidades, adaptaciones al medio y rasgos de la personalidad, delimitando estudios más de carácter cognitivo, mientras que el talento, se aleja del desarrollo intelectual y está ligado con la adquisición y desarrollo de habilidades en áreas específicas [2]. En cuanto al talento y las aptitudes sobresalientes, la mayor diferencia radica en las delimitaciones en las capacidades del individuo, el talento evoca a un capacidad desarrollada en un área específica: lingüística, matemática, artística, deportiva, etc.; mientras que las aptitudes sobresalientes aluden a las capacidades del individuo a destacarse en varios campos del quehacer humano: intelectual, creativo, socioafectivo, artístico y psicomotriz. Cabe señalar que la relación entre aptitudes sobresalientes y el talento, consiste en que el talento implica necesariamente la presencia de aptitudes sobresalientes, y no viceversa [1].

Por tanto, el talento y las aptitudes sobresalientes son aspectos que pueden ser medibles, observables y descriptivos, pues evocan a las formas y usos del conocimiento, las estrategias de aprendizaje y las forma de socialización de dicho conocimiento. Asimismo las aptitudes sobresalientes y el talento contienen características similares:

a) Es desarrollable, por tanto es posible aprender ciertas aptitudes
b) Es situado y contextualizado, siendo estas condiciones necesarias para potencializar las aptitudes, el desarrollo de estrategias y las caracterización de las actividades.
c) Potencializar hace referencia a fortalecer las aptitudes de los estudiantes.

Estos elementos coinciden con una perspectiva teórico social de las aptitudes sobresalientes, que considera que todos tenemos aptitudes sobresalientes en vía de desarrollo y todos podemos desarrollarlo [2]. Bajo esta postura, se afirma que es posible una sistematización de lo experiencial con lo aprendible y lo colectivo como una alternativa de concebir y potencializar las aptitudes sobresalientes, siendo evidente que la conceptualización presente es que las aptitudes sobresalientes son desarrollables a lo largo de la vida bajo la consideración de un entorno propicio para el desarrollo del potencial [3]. Esto último alude a un proceso que puede ser aprendible y desarrollable.

Al ser un proceso es posible la existencia de factores comunes que propician el desarrollo y fortalece las aptitudes sobresalientes, siendo estos factores no todos de carácter *escolar*¸ sino que intervienen factores que están fuera del aula, como es la cultura, la familia y las mismas experiencias científicas que se brinde a los individuos [4].

De manera particular, de las aptitudes sobresalientes definidas por la SEP se tiene especial interés en identificar en los niños las aptitudes intelectuales y creativas pues son las que más impactan en la ciencia y las matemáticas.

La aptitud intelectual se define como la disposición de un nivel elevado de recursos cognitivos par la adquisición y el manejo de contenidos verbales, lógicos, numéricos, espaciales, figurativos, entre otros [5]. Los alumnos, dan fácilmente soluciones adecuadas a las pruebas de inteligencia, requieren de un número menor de instrucciones para realizar las actividades, emplean lo aprendido previamente para adaptarse a las demandas de nuevos contextos, aprenden con rapidez, definen los conceptos con sus propias palabras, resuelven problemas de complejidad mayor a los habituales, corrigen sus propios errores.

La aptitud creativa es la capacidad para producir un gran número de ideas, diferentes entre sí y poco frecuentes, lo que se concreta en la elaboración de productos originales y novedosos como respuesta a situaciones y problemas planteados por el medio [6].

B. Las aptitudes sobresalientes y el conocimiento en uso.

El punto medular del estudio y del enfoque que se plantea para el proyecto, en relación con las aptitudes que se pretende identificar, está relacionado con el conocimiento en uso, más que un conocimiento meramente declarativo, el interés se centra en el conocimiento sobre algo, dando lugar a prácticas que brindan significado y permiten su aplicación, dónde la validez de ese conocimiento en uso es relativo al individuo y al contexto [7].

Pero, ¿qué conocimiento? El conocimiento matemático, que es trasversal a las ciencias básicas (matemáticas, física, química) y las ciencias, donde los tipos de pensamiento surgen de hacer uso de aquello que conocen y se desarrollan en colectivo, dentro de un ambiente (escolar o no escolar) donde la experiencia asociada al uso y significado de herramientas matemáticas (pensamientos y argumentos matemáticos) son la base para la identificación y para potencializar las aptitudes.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Desde la perspectivas teóricas del trabajo, las aptitudes sobresalientes en matemáticas son conceptualizadas, desde la construcción social, a partir del debate y las tensiones entre una situación de aprendizaje y el desarrollo intelectual como proceso social, multidimensional y contextual mediado por las herramientas de *pensamiento matemático* implícitos o explícitos en sus tomas de decisiones y evidentes en el tránsito desde el uso del conocimiento, las interacciones sociales y en términos de significados, argumentos, habilidades y aptitudes [2].

En esta postura, el conocimiento en uso queda enmarcado en una dinámica social, donde lo importante es el uso y construcción del *pensamiento matemático* pero dentro de una construcción en colectivo, donde los individuos tienen una identidad y características compartidas, y sobre todo construyen y negocian significados y genera prácticas propias [8], dónde lo importante de dicho conocimiento en uso es ese tránsito, consenso y negociación de significados y prácticas.

IV. MÉTODO

De acuerdo a la revisión de literatura, se busca resaltar el rol del conocimiento matemático como un conjunto de estrategias, habilidades, significados referentes al uso y al funcionamiento del mismo en diferentes situaciones problemáticas, situaciones que aluden al contexto y a problemas cercanos al estudiante. Esta es la visión con respecto al saber, no sólo proveniente de la perspectiva teórica sino, como alternativa para considerar equitativamente (en términos de políticas públicas) la relación del saber matemático con la sociedad.

El estudio se centra en un paradigma cualitativo, con métodos inductivos que permitan identificar a los estudiantes en las ciencias básicas con la intención de distinguir los usos que construye, atribuye y aplica a los conocimientos en las ciencias básicas para la resolución de problemas. Consienten la caracterización e identificación de los estudiantes al evidenciar elementos comunes como particulares y brindan información sobre las necesidades que presentan y requieren atención.

Para el trabajo se desarrollaron tres etapas con estudiantes del Valle del Mezquital, entre los cuales se tienen alumnos de 5° y 6° de educación básica y 1° de educación media básica.

A. Etapa 1. Identificación y valoración por parte de los profesores.

Para esta primera fase, el estudiante postulado para formar parte del proyecto debe contar con el inventario para la identificación de las aptitudes sobresalientes propuesta por la SEP para las escalas intelectuales y creativas [4]. Esta cuenta con características que resaltan las cualidades de dichos alumnos valorada de acuerdo a una escala Likert (nunca hasta siempre).

Se tomó en cuenta la opinión del profesor, debido a que las investigaciones reportan que en su interacción con los estudiantes, él ha tenido la oportunidad de valorar dichas actitudes.

En esta etapa no se valora el desempeño de los alumnos, las calificaciones o su desarrollo académico completo, debido a la perspectiva que adoptada sobre las aptitudes sobresalientes.

B. Etapa 2. Evaluación de aptitudes intelectuales y creativas.

De la cantidad de estudiantes postulados, se debía reducir la muestra a 60 estudiantes. Para ello se diseñó tres talleres denominados experimentos, papiroflexia y robótica, en lo cual los estudiantes tenían que demostrar las habilidades que se muestran en la Tabla 1 con sus respectivos indicadores. Fue necesario diseñar una rúbrica que estuviera acorde a cada una de los talleres, las experiencias y los pensamientos matemáticos asociados a los saberes en uso.

Tabla 1.
Perfil resultante de los estudiantes con aptitudes sobresalientes [2]

Característica	Indicadores
Pensamiento y razonamiento	Reconocimiento e interpretación de datos. Procedimientos hacia una toma de decisiones.
Argumentación	Comunicación y reporte de interpretaciones, resultados y razonamientos. Construcción de explicaciones basadas en argumentos y acciones. Selección y uso de diferentes fuentes de información y representación. Comunicación precisa de sus acciones reflexiones al respecto de sus hallazgos, interpretaciones y argumentaciones.
Construcción de modelos	Trabajo con modelos explícitos. Conceptualización, generalización y uso de información basada en investigación y modelación de situaciones.
Planteamiento y resolución de problemas	Identificación de información y desarrollo de procedimientos en situaciones específicas. Extracción de información Selección, comparación y evaluación de estrategias apropiadas para la solución de problemas
Representaciones	Selección e integración de representaciones como símbolos.
Utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico	Empleo de algoritmos, fórmulas, convenciones e interpretaciones. Pensamiento y razonamiento matemático (avanzado). Destreza en operaciones matemáticas formales y simbólicas.
Empleo de material y herramientas de apoyo	Selección y aplicación de estrategias de resolución de problemas. Desarrollo de habilidades de pensamiento y razonamiento, representaciones de asociación, características simbólicas y formales, comprensión, formulación y comunicación de sus interpretaciones y razonamientos.

Posterior a ello, se corroboraron los resultados en una matriz y se valoró los instrumentos, argumentos y acciones implementadas por los estudiantes. Para esto fue necesario video grabar las actividades, tomar nota durante los talleres y recolectar los productos de los estudiantes. Al final se contrastó y analizaron los resultados con los diferentes instructores expertos en el taller.

C. Etapa 3. Implementación del programa

Esta etapa tiene la finalidad de fortalecer y potencializar las aptitudes de los estudiantes en tres áreas: Ciencias (Física, química, agronomía, entre otras), Papiroflexia y Robótica.

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

Para ello se diseña una rúbrica que engloba las aptitudes necesarias para desarrollarse en el taller, y que permite evaluar el desarrollo de los estudiantes, desde su selección hasta la finalización del programa, por tanto fue necesario dividir estos talleres en 3 niveles en donde aumentaba el grado de exigencia, herramientas, argumentos y pensamiento de los estudiantes.

Asimismo se complementó esta actividad, con experiencias denominadas extracurriculares, como lo es visitas a museos enfocados al desarrollo de la ciencia, a manera de enriquecer las experiencias de los estudiantes.

V. Conclusiones

El propósito del proyecto es sistematizar un programa para la identificación y atención de los niños talentos, de tal forma que la propuesta pretende triangular la información obtenida en las diferentes etapas de investigación, contrastar con la teoría y la perspectiva teórica abordada a fin de delimitar las condiciones necesarias para el desarrollo de un programa de esta índole para la atención de niños con aptitudes sobresalientes en ciencias y matemáticas.

Sin embargo, desde la perspectiva teórica se estima que es posible distinguir cualidades necesarias que hagan viable ofertar a las instituciones de nivel básico y medio básico recursos y talleres que no sólo estén dirigidos a este tipo de estudiantes, sino que pueda brinde la pauta metodológica para desarrollar e innovar dentro del aula y se promueva el potencial de los alumnos.

Una perspectiva de este tipo no solo coadyuva a los retos de calidad, equidad y cobertura propuesta por la Reforma Integral de la Educación de la SEP, sino que pretende cambiar la perspectiva del aula a otra más democrática del aprendizaje; de manera tacita supone que todos tenemos la capacidad de aprender, por tanto todos estamos en vías de aprendizaje, de tal forma que no se pierde de vista las capacidades de los estudiantes, al contrario, admite que el trabajo de la institución, el aula y el profesor es proponer experiencias que permitan a los estudiantes desarrollar y/o potencializar sus aptitudes con relación al saber

Agradecimientos

Agradecemos al Programa de Fomento a las Vocaciones Científicas y Tecnológicas en Niños y Jóvenes Mexicanos del Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo en la realización del proyecto.

Referencias

[1] Secretaría de Educación Pública (SEP), Lineamiento para la acreditación, promoción y certificación anticipada de alumnos con aptitudes sobresalientes en educación básica, México, 2012, pp.4. http://www.educacionespecial.sep.gob.mx/pdf/tabinicio/2015/Lineamientos_acreditacion_promo.pdf

[2] E. M. Canché, "Matemática Educativa y Equidad: un estudio socioepistemológico del talento en matemáticas", Tesis de Doctorado, Cinvestav, México, 2013.

[3] E. M. Canché, M. Simón, "El talento especial de los niños en matemáticas: un estudio cualitativo", *ALME*, vol. 22, 2009, pp. 297-305

[4] Secretaría de Educación Pública (SEP), Atención educativa a niños con aptitudes sobresalientes. Guía para familias, México, 2011. http://www.educacionespecial.sep.gob.mx/pdf/tabinicio/2012/guia_para_familias.pdf

[5] M. Martínez, A. Castelló, "Los perfiles de la excepcionalidad intelectual", en Sandra Castañeda Figueiras (ed.). Educación, Aprendizaje y Cognición. Teoría en la Práctica, 2004, pp. 251-266

[6] Secretaría de Educación Pública (SEP), Propuesta de intervención: Atención educativa a alumnos y alumnas con aptitudes sobresalientes, México, 2006.

[7] R. Cantoral, G. Montiel, D. Reyes-Gasparini, El programa Socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: El Caso de Latinoamérica, *RELIME*, vol. 18, No. 1, 2015, pp.5-17

[8] E. Wenger, Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad, Barcelona: Paidós, 2001

"La Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Formación Inicial y la Educación Básica Volumen 1"
Memorias del 1er Congreso Nacional de Matemáticas, su Enseñanza y Aprendizaje "MATHENSM 2016"
ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria rural del Estado de Hidalgo

Lorena Trejo Guerrero[1]
[1]Universidad Pedagógica Nacional– Hidalgo
Carretera México – Pachuca s/n, Col. Venta Prieta, Pachuca de Soto, Hgo. México.
loreloren@hotmail.com

***Resumen*- En el presente escrito analizamos la problemática de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria pública rural en el Estado de Hidalgo, considerando su relación con los procesos sociales y la política educativa. Haciendo un corte a partir de la década de los ochentas, hasta la política educativa del gobierno actual y las condiciones que dan rumbo a las nuevas reformas y a los intereses a los cuales responde. La experiencia como profesores e investigadores de grupo de educación primaria en escuelas multigrado, nos permite advertir las condiciones que el contexto escolar ofrece a nuestra niñez en este medio, así como el nivel de aprendizaje de nuestros alumnos y las repercusiones del trabajo docente de educación básica, además de la importancia de la educación en el desarrollo socioeconómico de un país como el nuestro.**

***Palabras clave*- colectivo, enseñanza, multigrado, reforma, rural.**

***Abstract*- In this paper we analyze the problems of teaching mathematics in rural public elementary school in the state of Hidalgo, considering its relationship with social processes and education policy. Making a cut from the eighties, to the educational policy of the current government and the conditions that give direction to the new reforms and the interests which responds. Experience as teachers and researchers group of primary education in multigrade schools, allows us to observe the conditions that the school context offers our children in this environment, and the level of learning of our students and the impact of teaching basic education in addition to the importance of education in socio-economic development of a country like ours.**

***Keywords*- collective, teaching, multigrade, reform, rural.**

I. Introducción

Dentro de planes y programas de primaria encontramos que los contenidos del área de matemáticas se trabajan desde el primer grado con el fin de proporcionar experiencias que pongan en juego los significados que los números adquieren en diversos contextos y las diferentes relaciones que pueden establecerse entre ellos para aplicar ciertas habilidades en la resolución de situaciones problemáticas. Para ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda de conceptos matemáticos y socializar los métodos de solución entre ellos, al dar sentido y construir juntos la tarea de las matemáticas, es necesario que el maestro cuente con ciertas habilidades didácticas y de expresión que le permitan atender las necesidades reales de aprendizaje de sus alumnos.

II. LA ESCUELA RURAL EN EL ESTADO DE HIDALGO

En el aula de la escuela primaria, el conocimiento se construye gracias a un proceso de interacción entre los alumnos, el profesor y el contenido, para lo cual es necesario analizar no sólo la actividad constructiva de los estudiantes (ideas previas sobre el contenido, predisposición o motivación para el aprendizaje del mismo, etc.) sino también a los mecanismos de influencia o de ayuda pedagógica, rol que desempeña el profesor, así como la naturaleza del contenido matemático y el lugar en que se producen [4].

Siendo uno de los estados del centro del país, Hidalgo cuenta con una diversidad cultural de grupos étnicos muy importantes a nivel nacional, tal es el caso de grupos como los Huastecos de la región del mismo nombre, Otomíes del Valle del Mezquital y Otomíes de la Sierra de Tenango.

El retraso escolar es mayor en las zonas rurales, tal parece que el origen social determina en gran medida la probabilidad de alcanzar buenos índices de aprovechamiento escolar, de pasar al grado siguiente y de permanecer en la escuela después de los 10 años de edad, siguen estando directamente relacionados con el medio geográfico y económico de los alumnos. En estas condiciones, la educación no puede contribuir a la instauración de una sociedad más justa, democrática e igualitaria [8] a pesar de la creación de Programas Compensatorios -rezago en las comunidades alejadas- desde la década de los 80's, en donde se pueden apreciar la implantación de las políticas educativas vigentes, con la apertura de la participación social, las becas para los niños, para bajar entre otras problemáticas diagnosticadas el rezago y la deserción.

La educación es la mediación entre la aplicación de los avances tecnológicos y la identidad cultural, para elaborar proyectos que respondan a esas demandas, promoviendo la apertura de las prácticas culturales de diferentes etnias y grupos sociales en rezago educativo para que se desarrollen, manifiesten y caminen por la vía de la democratización participativa y plural, haciendo del conocimiento un instrumento eficaz, en la medida que permita crear, criticar y utilizar en pro de todos; pues el aprendizaje se da no sólo asimilando información sino operando con ella, creando nuevos elementos de conocimiento de una realidad histórica y socialmente determinada.

Partiendo de un mundo real dentro de nuestra sociedad contemporánea, equilibrar la balanza, tener la capacidad crítica, formando determinado tipo de ser humano, buenos ciudadanos, que si tienen mucho conocimiento, mejor, porque tal parece que lo que antes se constituía en un objetivo político, educar al pueblo ahora constituye un objetivo económico [11]. Lo cual implica que estamos *subordinados*

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

no sólo a ideologías nacionales, sino a internacionales que nos llevan a formar parte de la sociedad consumista mundial.

La profunda diferenciación en clases sociales más que como grupos pertenecientes a esa sociedad prevaleciente en México conlleva a una inadecuada comprensión mutua; bajo los desafíos de: *acceso, equidad, calidad*, la democracia en la educación no es una meta del gobierno actual (aunque se insinúe o llegue a convertirse en una declaración); y menos aún lo es de los organismos internacionales [7]; cuyos acuerdos son llevados a cabo en foros internacionales de donde surgen las "necesidades básicas de aprendizaje" o "los aprendizajes esperados" y además de ahí se desprenden las reformas a la educación básica "La enseñanza primaria es la base, y su finalidad fundamental es doble: producir una población alfabeta y con conocimientos básicos de aritmética capaz de resolver problemas en el hogar y en el trabajo.

Otra cuestión no menos importante es *el concepto de reforma educativa:* Centrada en el maestro, considerado "factor primordial de la educación" y enfatizando el papel activo del alumno. El papel del maestro descarta planteamientos que llevan a la autocrítica y al enfrentamiento de éste con su identidad y estilo de práctica educativa y por consiguiente a la alienación del alumno.

III. LA ESCUELA DE ORGANIZACIÓN COMPLETA Y LA ESCUELA MULTI-GRADO

Entendemos por escuelas de organización completa aquéllas que cuentan con un profesor por grado. Se considera escuela multi-grado las situada en un medio rural, en comunidades pequeñas, algunas en lugares poco accesibles o de difícil acceso (hay que llegar caminando), con una matrícula de inscripción que no alcanza los 20 alumnos por grado, motivo por el cual en estas escuelas trabajan 2, 3 o 4 profesores, atendiendo dos o más grados juntos cada uno.

La adquisición de experiencia laboral de los profesores en este tipo de escuelas es diferente a la experiencia de una escuela de organización completa, la dinámica laboral también es un punto importante, hay mejor comunicación entre compañeros y las funciones directivas se van rotando, las actividades técnico-pedagógicas se organizan de manera distinta a las de escuelas de organización completa, pues el trabajo con dos grados demanda una dosificación de contenidos afines a los dos grados que se atienden simultáneamente.

Consideramos que, a veces, por la ubicación geográfica de las escuelas multi - grado, los niños tienen ciertas carencias materiales y técnicas –falta de internet– que los ponen en desventaja ante las escuelas urbanas o ubicadas en cabeceras municipales, en donde hay más acceso a otro tipo de medios que influyen en su aprendizaje cotidiano; no obstante, estos estudiantes cuentan con experiencias peculiares y conocimientos diferentes de los cuales carecen los de escuelas urbanas y saturadas de alumnos.

Es importante considerar que la escuela es un lugar *"difícil de describir y pensar"*, y que las imágenes simplistas y unilaterales (en especial las vehiculizadas por la prensa) deben ser reemplazadas por una representación compleja y múltiple, fundada en la expresión de las mismas realidades en discursos diferentes, abandonando el punto de vista único, central, dominante, en el que se sitúa gustoso el observador mientras no se sienta involucrado [2], de aquí la razón de ser de la observación participante.

IV. LA ENSEÑANZA

En la actualidad, la enseñanza tiende a considerarse una actividad interactiva y de carácter procesual, en la que el maestro, facilita la construcción de conocimientos que realiza el alumno. Esta concepción se basa en tres ideas fundamentales: *"el alumno es el máximo responsable de su proceso de aprendizaje"* [3]; *"la actividad constructiva del alumno se aplica a contenidos que maestros y alumnos encuentran en gran medida elaborados y definidos en el currículum"* [6] y *"la función del profesor es propiciar estrategias de aprendizaje para los niños"* [1].

Un factor importante que influye en el énfasis académico se relaciona con los conocimientos que tengan los maestros de las asignaturas. Por ejemplo, las investigaciones de Bennett (1979), han demostrado claramente que a nivel de primaria los maestros tienen un conocimiento con frecuencia limitado de los contenidos de las asignaturas. Desde la perspectiva constructivista, las funciones del profesor tienen que ver con planificar de manera flexible para permitir adaptaciones a las necesidades de los alumnos; deben tomar en cuenta los conocimientos de los alumnos al inicio de las actividades; establecer tareas adecuadas susceptibles de realizarse con la ayuda pertinente, y fijar objetivos comprensibles con el propósito de que las actividades tengan un sentido claro para los alumnos [10].

V. EL ESTUDIO DE CLASES UNA PROPUESTA INNOVADORA

El propósito del Estudio de Clases es el trabajo colaborativo, desde la planeación, pasando por la implementación y la revisión de clases, para explorar maneras de mejorar la clase, analizando cualquier disparidad entre los objetivos que se planteen en el plan de clase y lo que realmente sucedió durante la clase. Se desarrolla en sesiones de revisión en trabajo colegiado, en donde se mencione el propósito de la clase, y se revise cada una de las etapas de la clase; en la cual los participantes se apoyen en las notas tomadas durante la clase implementada y en su propia experiencia pedagógica para preguntar y opinar acerca de los rasgos sobresalientes de la clase, el tipo de problemas, el rol del profesor, sus explicaciones, el uso de material y el pizarrón, así como el desempeño de los alumnos [12].
Es en el salón de clases donde hay manifestaciones de nuestra práctica que sirven para hacer una revisión del estilo particular, y por ello, es conveniente desarrollar la habilidad de la observación hacia la práctica personal dentro de la investigación acción, en la que [5], se muestra a favor de un modelo alternativo, si consideramos que el estilo de enseñanza se transforma y es importante atreverse a "ser diferente", la mejor manera es compartiendo con otros compañeros sus experiencias y observando los resultados de

ISBN Impreso: 978-0-9977571-2-5. E-ISBN: 978-0-9977571-0-1. ISBN CD-ROM: 978-0-9977571-1-8.
Indexado en www.mathensm.org.mx y en www.isbn.org

los alumnos en la construcción de su conocimiento durante su proceso de aprendizaje.

Por lo anterior, la sistematización y la generación de hábitos reflexivos, son necesarias para reconocer el efecto de las decisiones docentes en la enseñanza como la manifestación de un estilo propio, y se llevan a cabo, con el fin de comprender críticamente las prácticas de enseñanza personales y realizar las modificaciones necesarias, a partir de acciones o planes que respondan a las necesidades del contexto [1]. Si esto se realiza en equipos de trabajo, con la idea de intercambiar y proponer nuevas formas de abordar las problemáticas encontradas, y convertirse en oportunidades para observar las limitaciones propias y construir alternativas de acción, que guíen y mejoren la práctica docente. La observación sistemática de los acontecimientos en el aula por los propios colegas [9] permite descubrir los aspectos del estilo de enseñanza del maestro.

VI. CONCLUSIONES

No podemos pensar en un currículo reformado a partir de las necesidades reales de aprendizaje de nuestros alumnos, mientras la adquisición de la lengua escrita y las matemáticas, no retomen el carácter funcional que se merecen dentro del enfoque de Planes y Programas nuevos, peor aún sin considerar las circunstancias económicas, sociales y culturales que caracterizan a la sociedad mexicana de nuestro tiempo. A pesar de reconocer todo lo anterior, sería demasiado arriesgado pensar en la idea de una transformación nacional y regional, sabiendo que desgraciadamente, es el Estado el que se encarga de controlar nuestras acciones, vigiladas a su vez por los Organismos Internacionales. Pero ¿Valdrá la pena, pensar siquiera en las posibles alternativas de solución? Yo creo que sí, de aquí la razón de ser de nuestra propuesta "el trabajo colectivo con los profesores".

El liderazgo efectivo del maestro, su estilo y estrategias de enseñanza son factores relacionados con el progreso de los alumnos. Mientras que el aprendizaje es un proceso interno y "no sujeto a observación directa", la enseñanza es una actividad externa y aunque otras investigaciones han señalado diversos problemas para llegar a conclusiones generalizadas sobre prácticas efectivas de enseñanza, podemos decir que el aprendizaje efectivo se logra cuando los maestros explican claramente los objetivos de la lección desde su inicio [9].

Finalmente, si consideramos al profesor como el agente del cambio educativo, el trabajo colectivo con sus pares le permitirá reflexionar para renovar su propia práctica, y lejos de ser un instrumento del Sistema Educativo será el protagonista de una verdadera reforma educativa que nos permita rescatar, la dignidad del trabajador, emanada de la ética de la profesión, para cumplir con un verdadero compromiso, responsable y honesto para con nuestros alumnos.

REFERENCIAS

[1] Bennet, N. Estilos de enseñanza y procesos de los alumnos. Madrid, España: Morata. (1979).

[2] Bordieu, P. y Passeron, J. C. (1970). *La reproducción: Elementos para la teoría del sistema de enseñanza.* Barcelona, España: Editorial Laia.

[3] Carretero, M. *Constructivismo y educación.* Buenos Aires, Argentina: Aique. (1993).

[4] Coll, C. *Psicología genética y aprendizajes escolares.* Madrid, España: Siglo XXI. (1992).

[5] Elliot, J. *El cambio Educativo desde la investigación-acción.* Madrid, España: Morata. (1993).

[6] Gimeno, J. *El currículum: una reflexión sobre la práctica.* Madrid, España: Morata. (1988).

[7] Guerrero, A."Democratización de la educación: participación social en el contenido de la enseñanza" En: El cotidiano Núm. 87 UAM México enero-febrero de (1998).

[8] Guevara, G. "Un diagnóstico global" En: Gilberto Guevara Niebla (comp.) La catástrofe silenciosa. FCE. (1992)

[9] Isoda, M., Arcavi, A. y Mena Lorca, A. *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas.* Valparaiso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaiso. (2007).

[10] Pozo, I. *Aprendices y maestros. La nueva cultura del aprendizaje*. Madrid. Alianza. (1999).

[11] Street, S. "Magisterio y escuela pública: repensando los compromisos ante la agenda conservadora" en Esmeralda Matute y Rosa Martha Romo Beltrán (coords.) *Los retos de la educación del siglo XXI.* México. Universidad de Guadalajara. (2001).

[12] Trejo, L. y Valdemoros, M. "El uso del lenguaje matemático en la enseñanza del número natural en la escuela primaria". Tesis doctoral publicada en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV – IPN). (2015).

Derechos reservados

© 2016 ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MÉXICO

Libre acceso bajo BOAI-2001

Esta obra se terminó de imprimir el 06 de Febrero de 2017 en la Escuela Normal Superior de México.

Manuel Salazar 201, Col Ex-Hacienda el Rosario, Azcapotzalco, 02430
Ciudad de México, D.F.

La 1era edición consta de 20 Ejemplares.

Prohibida su venta.

Departamento de Investigación y Experimentación Educativa de la Escuela Normal Superior de México

www.diee.mx

www.mathensm.org.mx